@tehranMarkaz_BME

فصل هفتم - کار و انرژی:

• کار: اگر بر سیستمی نیرو اعمال شود و در اثر اعمال نیرو جابه جایی در سیستم اتفاق بیفتد، می گویند کار انجام شده است.

$W = F \cdot d \cdot \cos\theta$ (N.m ، N ، m)

W = کمیت عددی ، F = برداری ، d = برداری

* کمیت عددی = نرده ای = اسکالر
* کمیت برداری = عدد + جهت
* واحد کار، ژول است زیرا از تفاضل انرژی جنبشی به دست می آید.

• سیستم: مجموعه ای از اجسام که حرکتشون برامون مهم است که البته این تعریف از سیستم تنها در مکانیک کاربرد دارد نه جای دیگر.

• جابه جایی: کوتاه ترین فاصله از مبداء به سمت مقصد را گویند.

* کمیت برداری است.

A - - - > - - - B

* نمادها: Δx ، Δy ، Δz ، $\vec{d}$ که این ۳ تا همان $\Delta \vec{r}$ هستند.

• مسافت: کل مسیر پیموده شده را گویند.

* کمیت عددی است.

* نکته یادآوری:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$ → ضرب داخلی → کمیت عددی

$\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta$ → ضرب خارجی → برداری

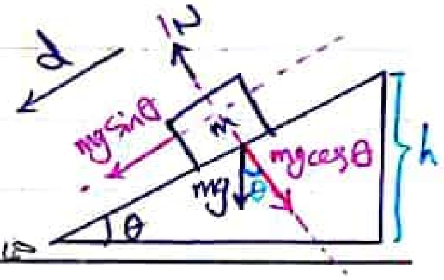
مثال ۱: جسمی بر روی سطح شیبداری به اندازه d جابه جا شده و در راستای سطح و به پایین حرکت می کند. کار کل انجام شده را محاسبه کنید.

چون با سطح جابجایی ۹۰° می سازد

$W_N = 0$

$W_{mg} = mgh \rightarrow \sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{h}{d} \rightarrow h = d\sin\theta$

$W_{mg} = mgd\sin\theta$ یا $W_{mg} = mgd\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ همان $\sin\theta$



Year. Month. Day. Subject.

راه دوم:

$W_N = 0$

$W_{mg\cos\theta} = (mg\cos\theta)\times d\times \sin 90^\circ = 0$

$W_{mg\sin\theta} = (mg\sin\theta)\times d\times \cos 0^\circ = mgd\sin\theta$

* نکته: همیشه mg با محور y ها همان θ را می سازد (در شکل قبل).

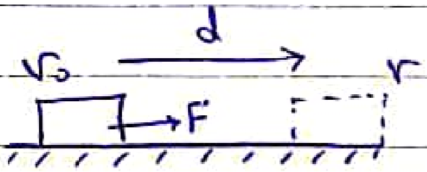
* به شکل زیر دقت شود:

در هر صورت h و θ تشکیل می شود ←

مثال ۲: جسمی به جرم m تحت تاثیر نیروی F به اندازه ی d جابه جا شده و سرعت اولیه آن از v_0 به v می رسد. رابطه ی بین کار نیرو و تغییرات سرعت را به دست آورید.

$\Sigma F = ma \to F = ma \Rightarrow Fd = mad$

از طرفی: $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \to ad = \frac{v^2 - v_0^2}{2}$



$W_T = m\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2}\right) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = K - K_0 \xrightarrow{\text{پس}} W_T = \Delta K$

* F بالا ممکن است برآیند کل نیروها یا حتی تک نیرو باشد.

* زاویه بین F و d صفر است پس cos می شه ۱.

• قضیه کار و انرژی و نتیجه اش: اگر رو سیستم کار انجام بشه، پس حتما سرعتش تغییر کرده و برعکس.

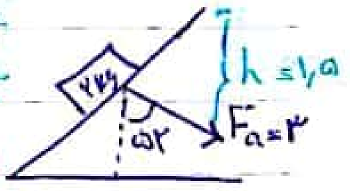
$W_T = \Delta K$

• مفهوم قانون دوم نیوتن: هر سیستم که بهش نیرو وارد بشه، دارای شتاب هم میشه

Scanned by CamScanner

Year: Month: Day: Subject:

مثال ۳: جسمی تحت تاثیر نیروی $F_a = 3N$ بر روی سطح شیب‌داری تا ارتفاع قائم ۵ m را جابجا می‌کند. سرعت جسم در طول جابجایی ثابت است. کار نیروی F_a را بدست آورید. $(m = 2kg)$



mg, h زاویه بین ۱۸۰ است.

mg ↓ ↑ h

$$W_T = 0 \rightarrow W_N + W_{mg} + W_{F_a} = 0$$

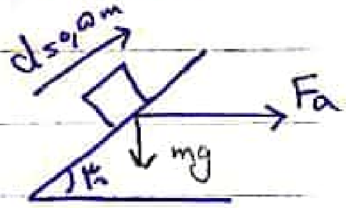
$$W_{mg\cos\theta} = mgh = 2\times 10\times \frac{15}{10} = 30$$

$$W_{F_a} = -W_{mg} \rightarrow W_{F_a} = -(mgh\cos 180) = 30$$

مثال ۴: نیروی افقی F_a به اندازه ۲۰N به کتابی به جرم ۳kg وارد می‌شود و آن را به اندازه نیم متر روی سطح شیب‌داری با زاویه ۳۰° بالا می‌برد.

الف) کار همه نیروها را حساب کنید.

ب) اگر انرژی جنبشی در ابتدا صفر باشد، سرعت در پایان جابجایی چقدر است؟



الف) $W_T = W_N + W_{mg} + W_{F_a}$

$W_N = 0$

$$W_{F_a} = F_a d\cos\theta = 20\times\frac{5}{10}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$W_{mg} = mgd\cos(\frac{\pi}{2}+30) = 3\times\frac{5}{10}\times 10\times(-\frac{1}{2}) = -\frac{15}{2} = -7.5$$

$$W_T = 0 - 7.5 + 5\sqrt{3} = +1\ J$$

ب) $W_T = \Delta K \rightarrow 1 = \frac{1}{2}mv^2 - 0 \rightarrow 1 = \frac{1}{2}\times 3\times v^2 \rightarrow v^2 = \frac{2}{3}$

@tehranMarkaz_BME

Scanned by CamScanner

Year. Month. Day. Subject.

* نیروها:

• به دو دسته ثابت و متغیر تقسیم می‌شوند.

ثابت ← N , mg , T (طناب) , f_k , f_s

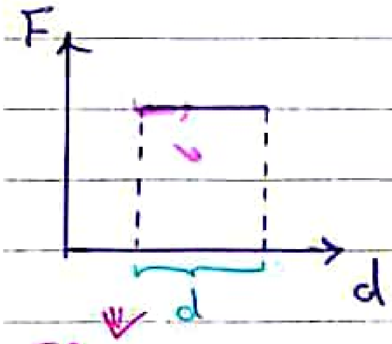
متغیر ← $f = -kx$ ← فنر

← این منفی داره میگه هر نیرویی که وارد کنیم، فنر در خلاف آن حرکت می‌کند

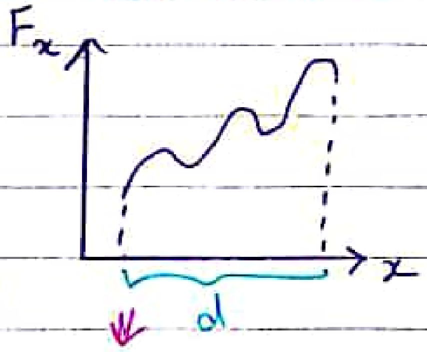
نکته:

$w = F.d.\cos\theta$

$w = \vec{F} \cdot \vec{d}$



نمودار نیروهای ثابت



نمودار نیروی متغیر فنر

* یادآوری ریاضیات:

• انتگرال: به معنی مجموع است. $\int$ را برای تعداد غیرقابل شمارش یا بینهایت استفاده می‌کنیم و در فیزیک می‌گوییم سیستم پیوسته است.

- اما از Σ (سیگما) برای تعداد قابل شمارش استفاده می‌کنیم و در فیزیک می‌گوییم سیستم گسسته است.

• دیفرانسیل: یک مقدار بسیار کوچک از یک کمیت متغیر را گویند.

- هرگاه دیفرانسیل مساوی صفر شد، یعنی آن کمیت ثابت است.

$df = 0 \longrightarrow f =$ ثابت

* Σ نماد یک مقدار بسیار کوچک اما ثابت است.

• Element: کوچکترین واحد سازنده هرچیز در درس فیزیک را یک المان یا نمونه می‌توان گفت.

بنابراین دیفرانسیل نیز در علم فیزیک نوعی المان است.

$w = \int F.dx$ فنر: $w = \int -k.dx = -\frac{1}{2}kx^2$

فنر $F = -kx$

مثال ۵: نیروی $\vec{F}=(Cx-3x^2)\hat{i}$ بر جسمی اثر کرده و آن را از $x=0$ با انرژی جنبشی ۲۰J به $x=3m$ با انرژی جنبشی ۱۱J منتقل می‌کند. مقدار C را به دست آورید.

$W=\Delta K \rightarrow W=K_2-K_1 \rightarrow W=11-20=-9\,J$

$W=\int_0^3 (Cx-3x^2)\,dx = \frac{Cx^2}{2}-\frac{3}{3}x^3\Big|_0^3 \Rightarrow \frac{9}{2}C-27=-9 \rightarrow C=4$

مثال ۶: نیروی $\vec{F}=(x^2-2.5)\hat{i}$ بر جسمی اثر کرده و آن را از $x_1=0$ تا $x_2=2m$ جابه‌جا می‌کند.
اگر در $x=0$ جسم ساکن باشد، انرژی جنبشی آن را در ۲ متری به دست آورید.
ب) max انرژی جنبشی بین ۰ و ۲ متر چقدر است؟

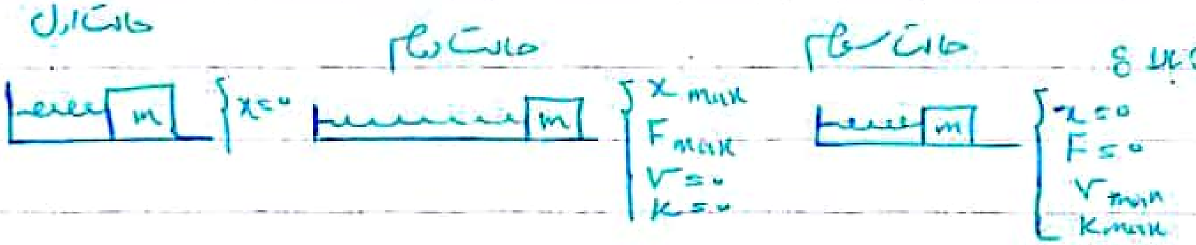
الف) $W=\Delta K \rightarrow W=K_2-K_1 \rightarrow W=K_2-0$

$W=\int_0^2 (x^2-2.5)\,dx = \frac{x^3}{3}-2.5x\Big|_0^2 \Rightarrow \frac{8}{3}-5=\frac{-7}{3}=K_2$

ب) $F=0 \rightarrow K_{max} \Rightarrow 2.5-x^2=0 \rightarrow \frac{25}{10}=x^2 \rightarrow x=\pm\sqrt{2.5}$

علامت مثبت قبول چون x بین ۰ تا ۲ یعنی مثبت جابه‌جا شده.

$\int_0^{2.5} (x^2-2.5)\,dx = \frac{x^3}{3}-2.5x\Big|_0^{2.5} = K_{max}$



* نکته تمرین بالا

یادآوری نیروی متغیر سه مؤلفه‌ای:

$\vec{F}=F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k} \rightarrow \vec{d}r=d_x\hat{i}+d_y\hat{j}+d_z\hat{k} \Rightarrow$

$W=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int (F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k})\cdot(d_x\hat{i}+d_y\hat{j}+d_z\hat{k}) =$ حاصل سه جمله‌ای؟

Scanned by CamScanner

* توان :

• توان یعنی نسبت کار انجام شده به زمانش . به عبارت دیگر در توان لحظه ای می توان گفت حاصل ضرب نقطه سرعت در نیرو را داریم .

$P_{متوسط} = \frac{W}{t}$ $\xrightarrow[\text{واحدی}]{\text{به لحاظ}}$ $W = \frac{J}{S}$

$P_{لحظه ای} = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot dx}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

* یادآوری ریاضیات :

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$ ← • مشتق یعنی تغییرات

$W = \int F \cdot dx$
$dW = F \cdot dx$ ← • دیفرانسیل و انتگرال یکدیگر را خنثی می کنند

---

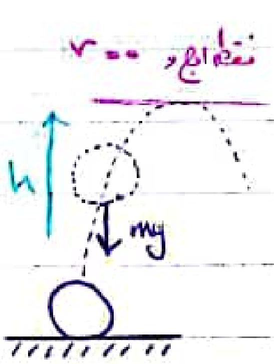
* کار برابر است با ضرب نقطه نیرو در جابه جایی
* توان برابر است با ضرب نقطه سرعت در نیرو

* $W = \int F \cdot dx$ → نیرو متغیر
* $W = \int 2dx$ → نیرو ثابت

* $\int_{0}^{d} F \cdot dx \rightarrow F \int dx = F \cdot x \Big|_{0}^{d} = F \cdot d$ (F ثابت)

Scanned by CamScanner

فصل هشتم - انرژی پتانسیل و پایستگی انرژی‌ها:



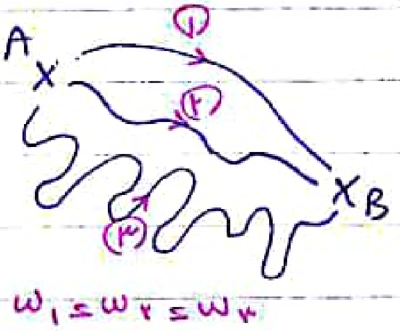
پاسخ به یک سوال برای شروع: چرا وقتی یک جسم را پرتاب می‌کنیم بالا سرعتش کم می‌شود؟ زیرا زاویه بین h و mg برابر است با ۱۸۰ و $\cos 180° = -1$ است پس با جایگذاری در فرمول: $W_{mg} = -mgh = \Delta K < 0$ کار کم می‌شود پس انرژی جنبشی و سرعت نیز کم می‌شوند و این عمل تا زمانی ادامه می‌یابد و توپ بالا می‌رود که نهایتاً $v=0$ شود.

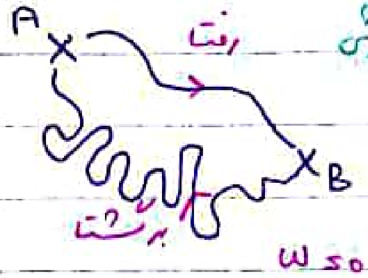
* در سوال بالا چرا انرژی پتانسیل داریم؟ چون نیروی پایستار وزن داریم و کار انجام می‌شود.

نیروها (ثابت و متغیر):

نیروهای پایستار: نیروهایی هستند که در سیستم باعث اتلاف انرژی نمی‌شوند (به لحاظ مفهومی) و کارشان به مسیر حرکت بستگی ندارد (در واقع حل فصل ۷ سقوط همان است) و اگر نیروی پایستار جایی وجود داشته باشد و کار انجام دهد، انرژی پتانسیل به وجود می‌آید ← مانند فنر یا mg و ...

نیروهای ناپایستار: نیروهایی هستند که در سیستم باعث اتلاف انرژی می‌شوند (به لحاظ مفهومی) و کارشان به مسیر حرکت بستگی دارد و هیچوقت صفر نمی‌شود.





* نکته مهم: در سیستم‌های دینامیکی اگر انرژی نخواهد اتلاف شود، به چه شکل خواهد بود؟ انرژی گرمایی

* روابط انرژی پتانسیل:

(۱) $W_{mg} = -mgh = \Delta K < 0$

$\Delta U = -W_{mg}$

$\Delta U = +mgh$

(۲) $W_{mg} = mgh = \Delta K > 0$

$\Delta U = -W_{mg}$

$\Delta U = -mgh$

Scanned by CamScanner

• نیرو و کار فنر در ارتباط با پتانسیل:

$\Delta U_{فنر} = -W_{فنر} \Rightarrow -\int -kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2$

* در استفاده دقت شود که کار فنر منفی است ولی پتانسیل مثبت:

$W_{فنر} = -\frac{1}{2}kx^2$ ولی $\Delta U_{فنر} = -W_{فنر} = +\frac{1}{2}kx^2$

• انرژی پتانسیل: انرژی ذخیره شده در سیستم است. پس به سیستم ربط دارد.

* انرژی پتانسیل به سیستم ربط دارد.

* انرژی جنبشی به جسم ربط دارد چرا که فقط جسم دارای سرعت می‌شود.

• سطح مرجع پتانسیل: سطحی که فرض می‌کنیم در آن انرژی پتانسیل برابر صفر است. $U=0$

• تعریف انرژی مکانیکی E: اگر در سیستم، همه نیروها پایستار باشند یعنی اتلاف انرژی نداشته باشیم و اصطکاک هم نداشته باشیم، هر دو حالتی که در سیستم در نظر بگیریم، مجموع انرژی‌هایشان برابر است.

$E = K + U \longrightarrow$ ①اعمال

$E_1 = E_2 \rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \xrightarrow[\text{یک طرف}]{\text{می‌بریم}} 0 = (K_2 - K_1) + (U_2 - U_1) \rightarrow \Delta K + \Delta U = 0$

②اعمال

این صفر شدن یعنی انرژی پایستگی تغییر نمی‌کند و از طرفی انرژی پتانسیل و جنبشی در ارتباط هستند یعنی یکی از آن‌ها کم شود، دیگری زیاد می‌شود و برعکس. نتیجه اصلی: تغییرات انرژی مکانیکی برابر با صفر است.

* نکته مهم: $W_T = \Delta K$ یعنی انرژی جنبشی تغییرش باعث تغییر کار کل نیروها می‌شود اما در $\Delta U = -W$ یعنی هر کار پایستار، یک انرژی پتانسیل مخصوص خودش را تغییر می‌دهد.

Scanned by CamScanner

Year. Month. Day. Subject.

مثال ۱: جسمی به جرم m بر روی نیم‌کره‌ای به شعاع R قرار دارد و با سرعت ۲ از بالاترین نقطه شروع به سر خوردن می‌کند. در چه ارتفاعی از سطح جدا می‌شود؟

$E_A = E_B$

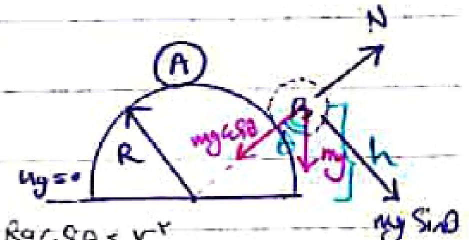
(۱) $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$ — چون شرط جدا شدن از سطح است → $N = 0$

$0 + mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$

(۲) $\sum F = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R}$

(۳) $\cos\theta = \frac{h}{mg\cos\theta} = \frac{h}{R}$ → (۲),(۳) → $Rg\cos\theta = v^2$

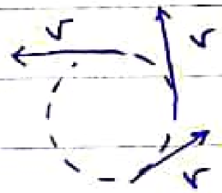
$Rg\frac{h}{R} = v^2 \rightarrow v^2 = gh$ (۴)



(۱),(۴) → $mgR = \frac{1}{2}mgh + mgh \rightarrow gR = \frac{3}{2}gh \rightarrow h = \frac{2}{3}R$ ✓

* چرا در مسئله قبل K_2 داشتیم؟ چون هم ارتفاع داره تغییر می‌کنه هم انرژی پتانسیل و هر دو رو باهم نوشتیم.

* نکته مثال قبل: در حرکت دایره‌ای، نیروهایی که بر راستای شعاع می‌افتند برای ما مهم هستند.



* یادآوری حرکت دایره‌ای برای مثال قبل:

• در حرکت دایره‌ای، اندازه v ثابت است ولی جهت آن متغیر است.

• در حرکت دایره‌ای راستای شعاع برای ما مهم است.

• در حرکت دایره‌ای شتاب به مرکزگرا داریم چون جهت سرعت تغییر کرده است و سرعت کمیت برداری است.

$F = \sum F = \frac{mv^2}{R}$

مثال ۲: جسمی به جرم ۱۲kg از بالای سطح شیب‌داری بدون اصطکاک به شیب ۳۰° رها می‌شود. در پایین سطح فنری قرار دارد که تحت تأثیر نیروی ۲۷۰N به اندازه ۲cm فشرده می‌شود. وقتی فنر به اندازه ۵/۵cm فشرده شود، جسم به طور لحظه‌ای متوقف می‌شود.

الف) مسافتی که جسم از لحظه آغاز حرکت تا توقف طی می‌کند چقدر است؟

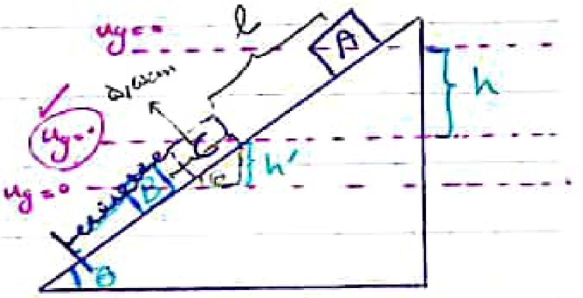
ب) سرعت جسم درست در لحظه تماس با فنر چقدر است؟

الف) $E_A = E_B$ — چون v لحظه‌ای متوقف شده — $(U_g + U_{فنر})$

$K_A + U_A = K_B + U_B$ — این منفی به خاطر اینکه B زیر سطح مبنا است

(۱) $mgh = -mgh' + \frac{1}{2}kx^2$

(۲) $\sin\theta = \frac{h'}{5.5\times10^{-2}} \Rightarrow h' = \sin\theta \times 5.5\times10^{-2}$



* $F = kx \rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{27000}{2} = 13500$

Scanned by CamScanner

$①,② \Rightarrow mgh = -mg(۵/۵\times10^{-۲}\times \sin\theta) + \frac{1}{۲}k(۵/۵\times10^{-۲})^۲ \rightarrow$ (θ = ۳۰)

$$h = \frac{-mg(۵/۵\times10^{-۲}\sin۳۰) + \frac{1}{۲}k(۵/۵\times10^{-۲})}{mg} = \frac{۱۴۴۷}{۱۲۰۰}$$

مثلث → $\sin۳۰ = \frac{h}{l} \Rightarrow \frac{1}{۲} = \frac{h}{l} \rightarrow l = ۲h$

طول مسیر $= l + ۵/۵\times10^{-۲} = ۲h + ۵/۵\times10^{-۲}$

ب / $E_A = E_C$

$K_A + U_A = K_C + U_C$ (صفر $(U_g + U_e)$) $\Rightarrow mgh = \frac{1}{۲}mv_C^2 \rightarrow v_C = \sqrt{۲gh}$

حالت‌های بعدی: $U_g = 0$ بالایی

$E_A = E_B \rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B$ (چون لحظه برخورد — چون سطح مبنا فرض) (این شد دامم)

$0 = -mgh' + \frac{1}{۲}kx^2 \Rightarrow \frac{1}{۲}kx^2 = mgh'$

ب / $E_A = E_C \rightarrow K_A + U_A = K_C + U_C$ (صفر $(U_g + U_e)$) $\rightarrow 0 = \frac{1}{۲}mv^2 - mgh$

$\frac{1}{۲}mv^2 = mgh$

$U_g = 0$ پایینی

الف / $E_A = E_B \rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B$ (چون مبنا) (صفر $(U_g + U_e)$)

$mgh = \frac{1}{۲}kx^2$

ب / $E_A = E_C \rightarrow K_A + U_A = K_C + U_C$ (صفر $(U_g + U_e)$)

$mgh = \frac{1}{۲}mv^2 + mgh$

@tehranMarkaz_BME

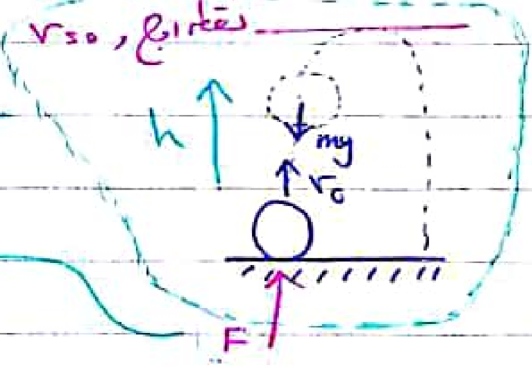
Scanned by CamScanner

نیروی خارجی :

• هر نیرویی که خارج از سیستم تعریف شود و بر روی سیستم کار انجام دهد و باعث حرکت سیستم شود را نیروی خارجی گویند.

* هرگاه در صورت مسئله پرسیده شود یا علت حرکت جسم یا شخص گفته شود، یعنی از محیط اطراف سیستم هم خبر داده پس ما نیروی خارجی داریم.

$W_{خارجی} = \Delta K + \Delta U$ ← اینجا دیگه نیست



← به طرفی می‌گوییم سیستم و هر چیزی که داخلش میشه مال خود سیستم

← این میشه نیروی خارجی چون داخل سیستم قرار ندارد.

مثال ۲: جسمی به جرم m تحت تأثیر نیروی F با سرعت v_0 شروع به حرکت می‌کند. پس از جابه‌جایی d به سرعت v می‌رسد. در طول مسیر نیروی اصطکاک بین جسم و سطح وجود دارد.

الف) رابطه‌ی بین کار و تغییرات سرعت را به دست آورید.

ب) اگر جسم بر روی سطح شیب‌داری قرار گیرد، تغییرات چگونه خواهد بود؟

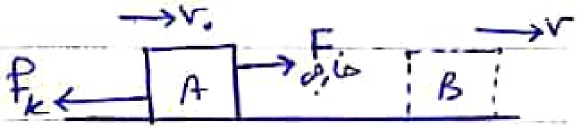
الف) $\Sigma F = ma$

$\times d$

$F_{خارجی} - f_k = ma$

$Fd - f_k d = mad$ → $\frac{v^2 - v_0^2}{2}$

$W_{خارجی F} = \Delta K + f_k d \rightarrow \Delta E_{th}$ یا همان



$|f_k d| = \Delta E_{th}$ ، th = thermal ← حرارتی

ب) $\Sigma F = ma$

$\times d$

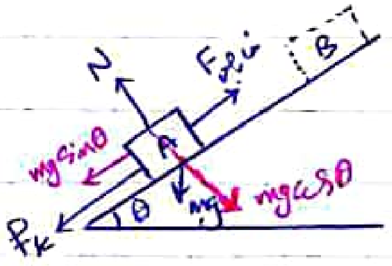
$F_{خارجی} - mg\sin\theta - f_k = ma$

$Fd - mgd\sin\theta - f_k d = mad$

$W_{خارجی F} = mgh + f_k d + m\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2}\right)$ ← همان

$W_{خارجی} = \Delta U + \Delta E_{th} + \Delta K$

خارج از سیستم ، مربوط به داخل سیستم



Scanned by CamScanner

* نکته مثال های قبل: همواره در صورت سوال حرف از سطح شیبدار یا فنر زده شود، می توانیم U ها را هم به محاسبات اضافه کنیم چراکه فنر و سطح شیبدار نیروهای پایستارند.

* اگر در مثال قبل، فنر هم داشتیم، باید اشکال می گرفتیم زیرا فنر نیروی متغیر است.

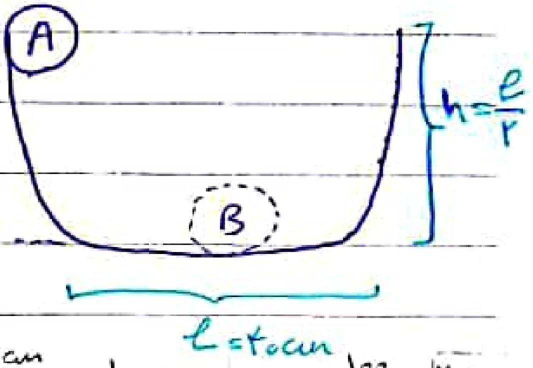
مثال ۴: جسمی به جرم m از ارتفاع $h = \frac{\ell}{2}$ با سرعت صفر به سمت پایین حرکت می کند. مسیر حرکت از دو قسمت منحنی شکل بدون اصطکاک و قسمت مسطح به طول $\ell = 40cm$ دارای ضریب اصطکاک ۰٫۲ تشکیل شده است. جسم در چه فاصله ای از لبه ی سمت چپ قسمت مسطح می ایستد؟

(چون هیچ نیروی خارجی نداریم)

$0 = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{th}$

$0 = (K_B - K_A) + (U_B - U_A) + \mu_k mg d$

که این بین d مسافت طی شده در ناحیه با اصطکاک، زیرا در اینجا ما نیروی ناپایستار f_k داریم، اگر نداشتیم d=0 می شد.



$0 = -mg\frac{\ell}{2} + \mu_k mgd \rightarrow d = \frac{\ell/2}{\mu_k} = \frac{20cm}{0,2} = 100cm \rightarrow \frac{100}{40} = 2,5$

که این عدد داره به ما میگه توپ یک بار کامل رفته و برگشته و سری دوم که می خواسته بره در عدد 20cm تونسته بره و سپس متوقف شده. که البته این مسئله را از همان عدد 100 هم می توانستیم بفهمیم. $100 = 40 + 40 + 20$

مثال ۵: قطعه ای به جرم 3,5kg فنری با ثابت 640 N/m را فشرده کرده و از حالت سکون شروع به حرکت می کند. وقتی فنر به طول عادی خود می رسد، قطعه از فنر جدا می شود و روی سطحی با ضریب اصطکاک ۰٫۲۵ حرکت می کند و پس از طی مسافت 7,8m متوقف می شود.

الف) افزایش انرژی گرمایی؟

الف/ $\Delta E_{th} = \mu_k mg(7,8) = 68,25 J$

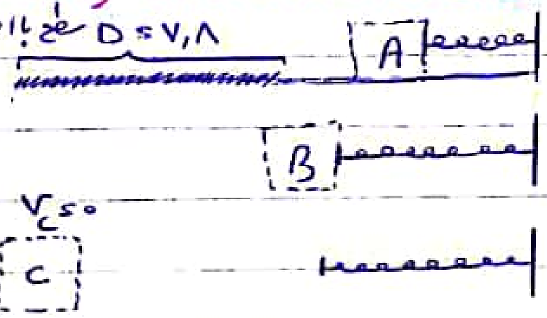
ب) انرژی جنبشی max قطعه؟ بین B و C مقایسه می کنیم چرا که طبق داده های مسئله در A و B مجهولات زیادی داریم و از طرفی K_{max} که خواسته مسئله است، در B است. اما در C اطلاعات معلومی داریم، پس مقایسه را بین B, C انجام می دهیم.

ج) میزان فشردگی فنر در ابتدا چقدر است؟

ب/ $\Delta K + \Delta U + \Delta E_{th} = 0$

$(K_C - K_B) + (U_C - U_B) + \mu_k mgd$

$K_{max} = \mu_k mgD = 68,25 J$

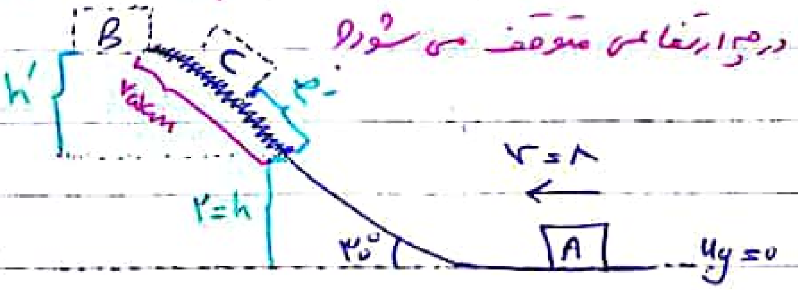


ج/ $E_A = E_B \rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B$

$\frac{1}{2}Kx^2 = 68,25 \rightarrow x = \sqrt{\frac{2 \times 68,25}{K}}$

Scanned by CamScanner

مثال ۵۶: قطعه‌ای از نقطه A با سرعت $8\,m/s$ در مسیری بدون اصطکاک حرکت می‌کند تا به ارتفاع $h=2m$ روی سطح شیب‌داری با زاویه $30°$ می‌رسد، سپس وارد ناحیه‌ای به طول $75cm$ (۷۵cm) و ضریب اصطکاک ۰٫۴ می‌شود. اگر قطعه بتواند به نقطه B برسد، سرعتش در آن نقطه چقدر است؟ و اگر نتواند به B برسد در چه ارتفاعی متوقف می‌شود؟



$$\Delta K + \Delta U + \Delta E = 0$$

$$(K_B - K_A) + (U_B - U_A) + f_K \ell = 0$$

$$\left(K_B - \tfrac{1}{2} m (8)^2\right) + \left(mg\,(2 + \ell \sin 30)\right) + \mu_K\, mg \cos 30\, \ell = 0$$

$$\hookrightarrow \tfrac{1}{2} m v_B^2 = \tfrac{1}{2} m (8)^2 - mg\left(2 + \frac{\ell}{2}\right) - \mu_K\, mg\, \ell \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$v_B^2 = (8)^2 - 2g\left(2 + \frac{\ell}{2}\right) - \mu_K g \ell \sqrt{3}$$

* نکته مهم:

- $v_B^2 > 0 \rightarrow$ یعنی به B رسیده و از آن عبور کرده
- $v_B^2 = 0 \rightarrow$ فقط به B رسیده
- $v_B^2 < 0 \rightarrow$ به B نرسیده

همه‌ی این‌ها هم به انرژی اولیه بستگی دارند که مشخص می‌کند جعبه می‌رسد یا نه.

- اگر در مثال بالا، $v_A = 2\,m/s$ باشد، چه می‌شود؟

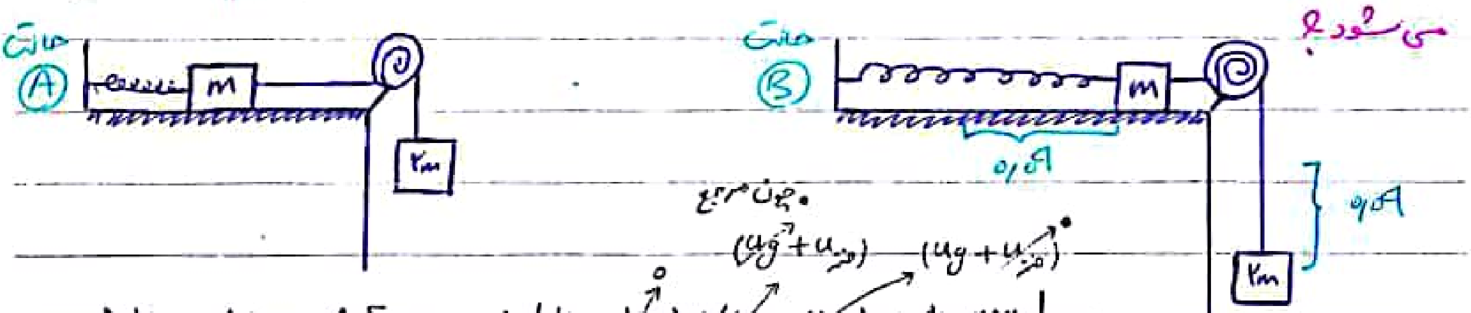
به جای عدد ۸ در فرمول‌های بالا، عدد ۲ می‌گذاریم، جواب $v_B^2 < 0$ می‌شود، یعنی به حالت B نرسیده، بنابراین در جایی مانند C متوقف می‌شود، $v = 0$ می‌شود.

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{th} = 0 \longrightarrow (K_C - K_A) + (U_C - U_A) + f_K \ell' = 0$$

$$-\tfrac{1}{2} m (2)^2 + \left(mg\,(2 + \ell' \sin 30)\right) + \mu_K\, mg \cos 30\, \ell' = 0$$

$$\ell' = \frac{2m - 2mg}{mg \sin 30 + \mu_K\, mg \cos 30} \qquad / \qquad h_C^* = 2 + \ell' \sin 30$$

مثال ۴۷: جسمی به جرم m و جسم دیگری به جرم 2m مطابق شکل توسط طنابی به یکدیگر متصل می‌باشند. جسم m به فنری با ثابت 240 N/m متصل است. سیستم از حالت سکون رها می‌شود. سطح دارای اصطکاک با ضریب [illegible] می‌باشد. اگر جسم آویزان 0.09 متر سقوط کند، انرژی جنبشی سیستم چقدر می‌شود؟



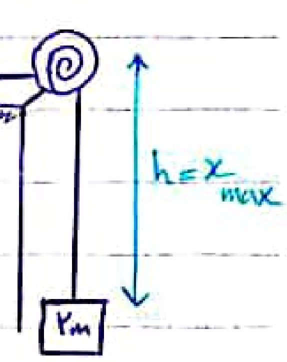
$$\Delta K + \Delta U + \Delta E = 0 \Rightarrow (K_B - K_A^{0}) + (U_B - U_A^{0}) + \mu_k m g d = 0$$

$$K_B + \left(\tfrac{1}{2}k(0.09)^2 - 2mg(0.09)\right) + \mu_k mg(0.09) = 0$$

* نکته مهم مثال بالا: وقتی در مسائل دو جرمی پرسیده می‌شود که انرژی جنبشی سیستم چقدر است، در واقع معنای این جمله می‌شود مجموع انرژی جنبشی هر دو جرم (دو جسم) با هم یعنی داریم:

$$K_B = \left(\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}(2m)v^2\right)_B$$

– در مثال بالا، max ارتفاعی که جسم آویزان سقوط می‌کند، چقدر است؟



$$\Delta K + \Delta U + \Delta E = 0 \Rightarrow (K_C^{0} - K_A^{0}) + (U_C - U_A^{0}) + \mu_k m g d = 0$$

$$\left(\tfrac{1}{2}k x_{max}^2 - 2mg\, x_{max}\right) + \mu_k mg\, x_{max} = 0$$

$$x_{max} = \frac{2mg - \mu_k mg}{\tfrac{1}{2}k}$$

* نکته: در حل مسائل این فصل، هرگاه در مسئله حرفی از اصطکاک داشتیم، از رابطه $\Delta K + \Delta U + \Delta E = 0$ می‌رویم و اگر نداشتیم از همان راه $E_A = E_B$ مسئله را حل می‌کنیم.

Scanned by CamScanner

Year. Month. Day. Subject.

فصل نهم - مرکز جرم و تکانه خطی:

* بخش اول - مرکز جرم:

مرکز جرم:
- یک نقطه است } و فرض با موارد زیر است:
  ۱- تمام جرم سیستم در آن نقطه قرار دارد.
  ۲- تمام نیروهای خارجی به آن نقطه اعمال می‌شوند.
- همواره سمت جرم بزرگتر است.
- مرکز جرم برابر است با حاصلضرب جرم در فاصله تا مبداء و مختصاتش Cm است.
- مرکز جرم با مرکز ثقل تفاوت دارد.

* Cm = Center of math = مرکز جرم

انواع سیستم‌های جرمی:

- سیستم‌های جرم گسسته: مجموعه‌ای از جرم‌ها هستند که می‌توانند مستقل از یکدیگر حرکت کنند. یعنی حرکت هر جرم به جرم دیگر بستگی ندارد. اگر بر روی یکی از اجزا کار انجام شود تاثیری بر دیگر اجزا ندارد. مانند توپ‌های بیلیارد ← به عبارتی سیستم‌ها Σ است.
- سیستم‌های جرم پیوسته: این سیستم زمانی کاربرد دارد که مثلا راجع به اجزای سازنده یک جسم که آن جسم به تنهایی یک جرم است صحبت کنیم. چرا که تمام اجزای یک جسم به هم ربط دارند و مستقل از یکدیگر نیستند. مانند اجزای سازنده یکی از توپ‌های بیلیارد ← به عبارتی سیستم‌ها ∫ است.

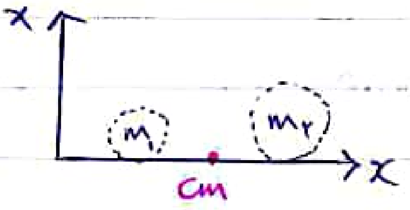
* دقت شود که در سیستم‌های جرم گسسته حداقل باید دو جرم داشته باشیم.

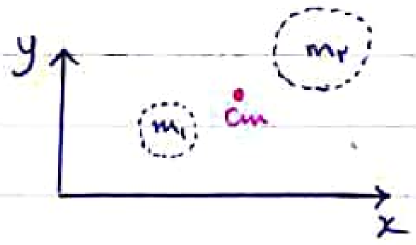
* فرمول‌ها و روابط:

- $x_{cm}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2} \Rightarrow x_{cm}=\frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}$

- $y_{cm}=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2} \Rightarrow y_{cm}=\frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}$

- $z_{cm}=\frac{m_1z_1+m_2z_2}{m_1+m_2} \Rightarrow z_{cm}=\frac{\Sigma m_i z_i}{m_i}$





* به i می‌گویند اندیس شمارش.

Scanned by CamScanner

Year. Month. Day. Subject.

• بردار مکان : در علم فیزیک هرگاه بخواهیم نقطه ای را معرفی کنیم ، از بردار مکان استفاده می کنیم .

* هرگاه از بردار مکان مشتق بگیریم ، سرعت به دست می آید .

$$\vec r_{cm} = x_{cm}\hat i + y_{cm}\hat j + z_{cm}\hat k$$

$$\vec v_{cm} = \frac{d\vec r_{cm}}{dt} = \frac{dx_{cm}}{dt}\hat i + \frac{dy_{cm}}{dt}\hat j + \frac{dz_{cm}}{dt}\hat k$$

$$\vec v_{cm} = (v_x)_{cm}\hat i + (v_y)_{cm}\hat j + (v_z)_{cm}\hat k$$

$$(v_x)_{cm} = \frac{dx_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}\right) = \frac{\Sigma m_i \frac{dx_i}{dt}}{\Sigma m_i}$$

$$(v_x)_{cm} = \frac{\Sigma m_i (v_x)_i}{\Sigma m_i} \Big/ (v_y)_{cm} = \frac{\Sigma m_i (v_y)_i}{\Sigma m_i} \Big/ (v_z)_{cm} = \frac{\Sigma m_i (v_z)_i}{\Sigma m_i}$$

* هرگاه از بردار سرعت مشتق بگیریم ، شتاب به دست می آید .

$$\vec a_{cm} = \frac{d\vec v_{cm}}{dt} = \frac{d(v_x)_{cm}}{dt}\hat i + \frac{d(v_y)_{cm}}{dt}\hat j + \frac{d(v_z)_{cm}}{dt}\hat k$$

$$\vec a_{cm} = (a_x)_{cm}\hat i + (a_y)_{cm}\hat j + (a_z)_{cm}\hat k$$

$$(a_x)_{cm} = \frac{d(v_x)_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\Sigma m_i (v_x)_i}{\Sigma m_i}\right) = \frac{\Sigma m_i \frac{d(v_x)_i}{dt}}{\Sigma m_i}$$

$$(a_x)_{cm} = \frac{\Sigma m_i (a_x)_i}{\Sigma m_i} \Big/ (a_y)_{cm} = \frac{\Sigma m_i (a_y)_i}{\Sigma m_i} \Big/ (a_z)_{cm} = \frac{\Sigma m_i (a_z)_i}{\Sigma m_i}$$

* نکته : Σm_i یعنی مجموع جرم کل سیستم که بیشتر اوقات در مسائل برای کوتاه شدن جای آن M می گذارند .

$$\Sigma m_i = M$$

Scanned by CamScanner

* قانون دوم نیوتن برای مرکز جرم:

$$\vec{F}_{net} = M\vec{a}_{cm} \begin{cases} (F_x)_{net} = M(a_x)_{cm} \\ (F_y)_{net} = M(a_y)_{cm} \\ (F_z)_{net} = M(a_z)_{cm} \end{cases}$$

* net یعنی برآیند نیروهای خارجی بر مرکز جرم.

* چرا در روابط بالا برای ما نیروهای خارج از سیستم مهم است؟ زیرا در داخل سیستم قانون عمل و عکس العمل برقرار است. از هنگام بررسی نیروهای خارج از سیستم، برای ما نیرویی که وارد کردیم مهم است و عکس العمل نیرو اهمیت ندارد.

* نکته: هنگامی که یک توپ را پرتاب می‌کنیم، این توپ مسیر پرتابه‌ای را طی می‌کند.

* بخش دوم - تکانه خطی:

- تکانه خطی تک ذره: در این بخش با سیستم‌هایی سروکار داریم که در یک جهت و با یک سرعت حرکت می‌کنند مانند قطار.

، فرض می‌کنیم پس یعنی m ثابت است.

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (kg,\ m/s) \longrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \Sigma\vec{F}$$

$$\xrightarrow[\text{به جای}]{\text{پس از این}} \Sigma\vec{F} = m\vec{a} \xrightarrow[\text{استفاده می‌کنیم}]{\text{از این}} \frac{d\vec{P}}{dt} = \Sigma\vec{F}$$

→ قانون دوم نیوتن بر حسب تکانه

* قانون دوم نیوتن بیان می‌کند که اگر نیرو اعمال شود، حتماً تکانه تغییر می‌کند و برعکس. → مهم

- تکانه خطی برای سیستم ذرات:

(۱) $\vec{P}_{\text{کل}} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \cdots + \vec{P}_n$

$\Sigma m_i\vec{v}_i = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n$

(۲) $\vec{v}_{cm} = \frac{\Sigma m_i\vec{v}_i}{M}$

$$\xrightarrow{(2),(1)} \vec{P}_{\text{کل}} = M\vec{v}_{cm}$$

$$\frac{d\vec{P}_{\text{کل}}}{dt} = \frac{dM}{dt}\vec{v}_{cm} + M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_{\text{کل}}}{dt} = M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{net} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_{\text{کل}}}{dt} = \vec{F}_{net}$$

← قانون دوم نیوتن برای مرکز جرم

Scanned by CamScanner

• تکانه خطی می‌تواند یک قانون پایسته باشد:

گفتیم اگر روی ذرات سیستم اثر هر سیستم یعنی آن کمیت یک کمیت ثابت بوده است. ← به دو دیدگاه می‌گذاریم

فرض: $\vec{F}_{net} = 0 \longrightarrow \dfrac{d\vec{P}_{کل}}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{P}_{کل} = \text{ثابت} \Longrightarrow \boxed{P_i = P_f}$ مهم *

① دیدگاه تکانه‌ای ما

← این رابطه یعنی هر تغییراتی بر روی سیستم رخ دهد باز هم تکانه ثابت است و تغییرات بر روی آن اعمال نمی‌شود.

← سینماتیک یعنی حرکت‌شناسی و در سینماتیک برای ما v و x و a مهم است.

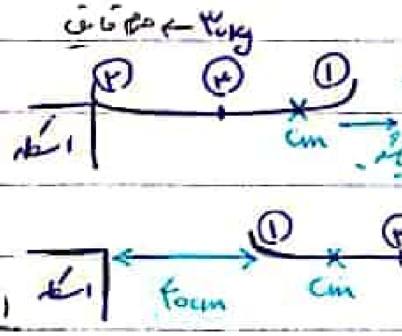
$a_{cm} = 0 \longrightarrow v_{cm} = \text{ثابت} \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \begin{cases} v_{cm} = 0 \\ \downarrow \text{پس} \\ x_{cm} = \text{ثابت} \end{cases}$

← این رابطه یعنی سیستم همواره طوری حرکت می‌کند که مکان مرکز جرم تغییری نکند.

② دیدگاه سینماتیکی ما

مثال ۱: شخصی به جرم ۸۰kg (نفر اول) و شخصی با جرم کمتر (نفر دوم) سوار یک قایق به جرم ۳۰kg هستند. طول قایق ۳m است، قایق در آب آرام ساکن است. این دو نفر جای خود را با هم عوض می‌کنند، شخص اول متوجه می‌شود در اثر این جابه‌جایی قایق ۴۰cm نسبت به لبه‌ی اسکله جابه‌جا شده است، جرم شخص سبک‌تر را به دست آورید.

(آب آرام ←) (قایق ساکن ←)



چون باید نزدیک‌تر به شخص سنگین‌تر باشد.

$F_{net} = 0 \Longrightarrow v_{cm} = 0$

$v_{cm} = \text{ثابت} \longrightarrow x_{cm} = \text{ثابت}$

$(x_{cm})_i = (x_{cm})_f$

← چون مبدأ را در نظر گرفتیم اسکله

$$\frac{80(3) + m_2(0) + 30(1/5)}{80 + m_2 + 30} = \frac{80(0/4) + 30(1/9) + m_2(3/4)}{m_2 + 30 + 80}$$

$$\Longrightarrow m_2 = \frac{80(2/6) - 30(0/4)}{3/4} = 56\ kg$$

* نکته مهم: همواره سیستم خلاف جهت حرکت جسم سنگین‌تر حرکت می‌کند تا مکان مرکز جرم ثابت باقی بماند.

@tehranMarkaz_BME

Scanned by CamScanner

فرض:
$p_i = p_f$ (تکانه‌ی خطی کل سیستم)
یا
$F_{net} = 0$

برخورد:
- کشسان
- ناکشسان
- کاملاً ناکشسان

انفجار

i = قبل از برخورد
f = بعد از برخورد

* بخش اول – برخورد:

① برخورد کشسان: $K_i = K_f$: برخوردهایی است که در آن انرژی جنبشی هدر نمی‌رود.

② برخورد ناکشسان: $K_i \neq K_f$: " " " " " " " انرژی جنبشی هدر می‌رود.

③ برخورد کاملاً ناکشسان: $p_i = p_f$: برخوردی است که بعد از برخورد، اجسام درهم فرو رفته و یا گیر می‌کنند و با یک سرعت حرکت می‌کنند.

* شرط برخوردها: قانون پایستگی تکانه

* نکته: نیروی برخورد که میان اجسام به وجود می‌آید در زمان کوتاه و خیلی سنگین و بزرگ است.

* نکته: فقط در زمان برخورد می‌توانیم از نیروهای خارجی صرف نظر کنیم.

* بعد از برخورد و قبل از برخورد، تمام نیروهای خارجی سرجای خود هستند.

* در فصل انفجار نیز از نیروهای خارجی صرف نظر می‌کنیم پس در انفجار هم مانند برخورد، قانون پایستگی تکانه برقرار است. و این تکانه برای کل سیستم است.

* هر انرژی به جز انرژی جنبشی، انرژی هدر رفته به حساب می‌آید و لزوماً انرژی جنبشی مورد بحث در این فصل، انرژی جنبشی کل سیستم است.

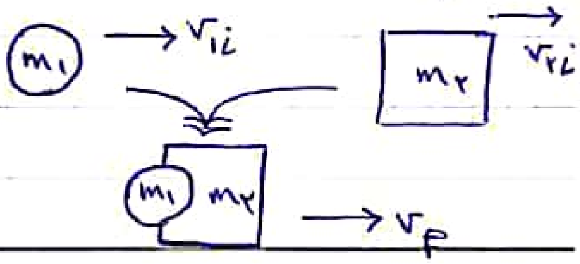
- یک جریان ولی دو دیدگاه متفاوت:

در فصل ۸ - در هنگام برخورد یک توپ به یک فنر می‌گفتیم، انرژی جنبشی توپ منتقل شده و در فنر به انرژی کشسانی فنر تبدیل شده است.

اما در فصل ۹ فقط می‌گوییم وقتی توپ به فنر برخورد کرده است، انرژی جنبشی توپ هدر رفته است.

- رابطه‌ی برخورد کاملاً ناکشسان:

$$P_i = P_f$$
$$P_{1i} + P_{2i} = P_f$$
$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$



Scanned by CamScanner

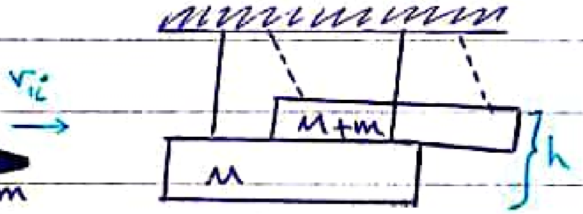
مثال ۲: قطعه چوبی به جرم M از دو ریسمان آویزان می‌باشد و در حالت سکون قرار دارد. گلوله‌ای به جرم m با سرعت v به قطعه چوب برخورد کرده و در آن گیر می‌کند سپس به همراه قطعه چوب تا ارتفاع h بالا می‌رود. سرعت گلوله را قبل از برخورد به دست آورید. * برخورد از نوع کاملاً ناکشسان

* در این مسئله فقط در لحظه برخورد، انرژی هدر رفته است.

$P_i = P_f \rightarrow P_{1i} + P_{2i} = P_f$

$m_i v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f$

(مجهول) — (مجهول دوم)



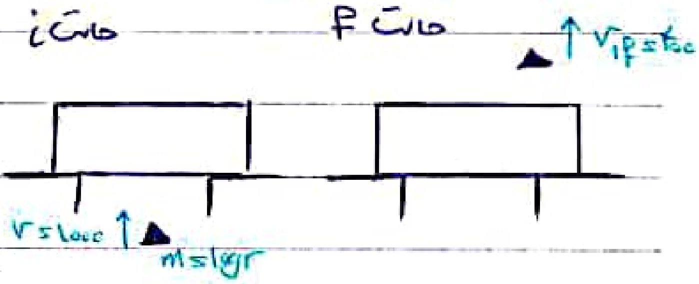
$v_f \rightarrow \frac{1}{2}(M+m)v_f^2 = (M+m)gh$

$v_f = \sqrt{2gh}$ → دلیل: چون وقتی گلوله رفته داخل چوب، انرژی جنبشی به پتانسیل تبدیل شده

→ (ادامه مسئله) $m_i v_{1i} = (m_i + M) v_f \rightarrow v_{1i} = \frac{M+m_i}{m_i}\sqrt{2gh}$

مثال ۳: یک گلوله‌ی ۱۰ گرمی با سرعت 1000 m/s به سمت بالا حرکت می‌کند به قطعه ۵ کیلوگرمی که در ابتدا ساکن است برخورد کرده و از آن عبور می‌کند. سرعت گلوله هنگام خروج از قطعه 400 m/s است. قطعه چوب تا چه ارتفاع بیشینه‌ای نسبت به مکان اولیه‌اش بالا می‌رود؟ * برخورد از نوع ناکشسان.

$P_i = P_f \rightarrow P_{1i} + P_{2i} = P_{1f} + P_{2f}$



$(10\times10^{-3})(1000) = (10\times10^{-3})400 + 5v_{2f}$

$v_{2f} = \frac{6}{5}\ m/s$

$\frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 = m_2 g h \rightarrow h = \frac{v_{2f}^2}{2g} = \frac{(\frac{6}{5})^2}{20}$

مثال ۴: قطعه‌ای به جرم 2kg با سرعت 10 m/s به سمت راست و قطعه‌ی دوم به جرم 5kg با سرعت 3 m/s به سمت راست حرکت می‌کند. سطح بدون اصطکاک است و فنری با ثابت 1000 N/m به قطعه دوم متصل است. وقتی قطعه‌ها برخورد کنند، در لحظه‌ای که دو قطعه سرعت یکسانی دارند، فشردگی فنر را به دست آورید. * برخورد کاملاً ناکشسان

$P_i = P_f \rightarrow P_{1i} + P_{2i} = P_f$

$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$

$20 + 15 = (7) v_f \rightarrow v_f = 5$

$K_i - K_f =$ انرژی هدر رفته

$(\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2) - \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_f^2 =$ انرژی داخل فنر

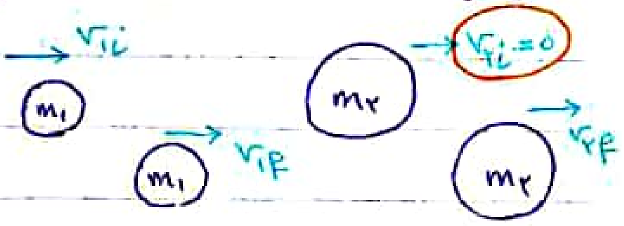
$\frac{1}{2}\times 2(10)^2 + \frac{1}{2}(5)(3)^2 - \frac{1}{2}(7)(5)^2 = \frac{1}{2}(1000)x^2$

← همان $\frac{1}{2}kx^2$

Scanned by CamScanner

Year. Month. Day. Subject.

① برخورد کشسان هدف ساکن یک بعدی و روابط:



$$P_i = P_f$$

$$P_{1i} + P_{2i} = P_{1f} + P_{2f}$$

$$① \quad m_1 v_{1i} = m_1 \underset{?}{v_{1f}} + m_2 \underset{?}{v_{2f}}$$

$$K_i = K_f$$

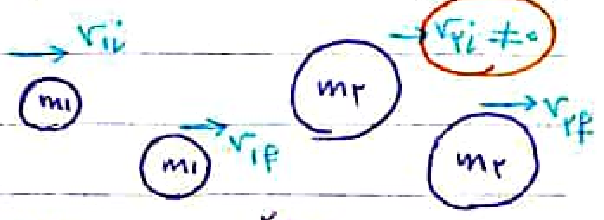
$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}$$

$$② \quad \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 \underset{?}{v_{1f}^2} + \frac{1}{2} m_2 \underset{?}{v_{2f}^2}$$

$$\rightarrow \quad v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

② برخورد کشسان هدف متحرک یک بعدی و روابط:



$$P_i = P_f$$

$$P_{1i} + P_{2i} = P_{1f} + P_{2f}$$

$$① \quad m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 \underset{?}{v_{1f}} + m_2 \underset{?}{v_{2f}}$$

$$K_i = K_f$$

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}$$

$$② \quad \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 \underset{?}{v_{1f}^2} + \frac{1}{2} \underset{?}{v_{2f}^2}$$

$$\rightarrow \quad v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

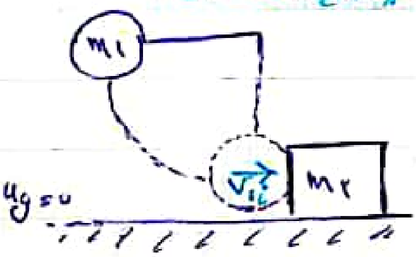
$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

مثال ۵: گلوله‌ای فولادی به جرم نیم کیلوگرم به سیمی به طول ۷۰cm بسته شده است. وقتی سیم در وضعیت افقی است، گلوله را رها می‌کنیم. گلوله در پایین‌ترین نقطهٔ مسیرش به یک قطعهٔ فولادی به جرم ۲/۵kg که ساکن روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد، برخورد می‌کند. برخورد از نوع کشسان است.

الف) سرعت گلوله قبل از برخورد؟ ب) سرعت گلوله و قطعه بعد از برخورد را به دست آورید.

* از نوع هدف ساکن.

جواب/الف: $m_1 g \ell = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \rightarrow v_{1i} = \sqrt{2g\ell}$ $\quad v_{2i} = 0$ ← چون هدف ساکن است.



جواب/ب: $v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} = -\frac{2}{3}\sqrt{2g\ell}$

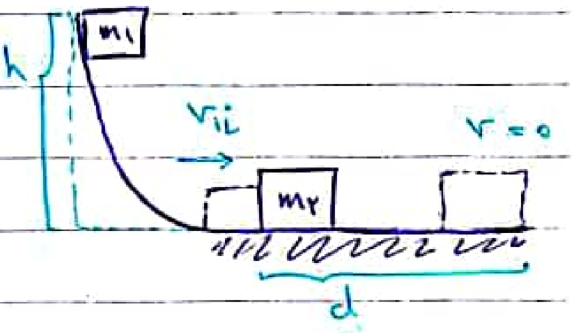
$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{1}{3}\sqrt{2g\ell}$$

Scanned by CamScanner

مثال ۴۶: قطعه یخ به جرم m_1 از حالت سکون از ارتفاع ۲/۵ m در امتداد شیب بدون اصطکاکی سر می‌خورد و با قطعه ساکن دیگر به جرم $2m_2$ برخورد کرده و سپس قطعه دوم به ناحیه‌ای با ضریب اصطکاک نیم وارد شده پس از طی مسافت d در آن ناحیه متوقف می‌شود.

الف) اگر برخورد کشسان باشد مسافت d چقدر است؟ * برخورد از نوع هدف ساکن است.

ب) اگر کاملاً ناکشسان باشد. مسافت d چقدر است؟



الف/ $m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \rightarrow v_{1i} = \sqrt{2gh}$ و $v_{2i} = 0$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} = -\frac{1}{3}\sqrt{2gh}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{2}{3}\sqrt{2gh}$$

$$0 = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{th} \rightarrow 0 = \left(0 - \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2\right) + \mu_k m_2 g d$$

$$d = \frac{\frac{1}{2} v_{2f}^2}{\mu_k g} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{9}(2gh)}{\mu_k g} = \frac{4}{9} \frac{h}{\mu_k}$$

جواب ب/ $m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \rightarrow v_{1i} = \sqrt{2gh}$ $\quad v_{2i} = 0$

$$P_i = P_f \rightarrow P_{1i} + \overset{0}{P_{2i}} = P_f \rightarrow m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f \rightarrow v_f = \frac{1}{3}\sqrt{2gh}$$

$$0 = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{th} \rightarrow 0 = \left(0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2\right) + \mu_k (m_1 + m_2) d g$$

$$d = \frac{\frac{1}{2} v_f^2}{\mu_k g} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{9}(2gh)}{\mu_k g} = \frac{1}{9} \frac{h}{\mu_k}$$

Scanned by CamScanner

فصل دهم ـ حرکت دورانی:

• محور دوران: خطی است که سیستم بر روی آن دوران می‌کند.

• خصوصیت حرکت خطی: کل اجزا باهم و با یک سرعت و در یک جهت حرکت می‌کنند.

• اهمیت و تعریف محور یا مختصات: محلی است که ما همه‌ی اطلاعات را نسبت به آن می‌سنجیم.

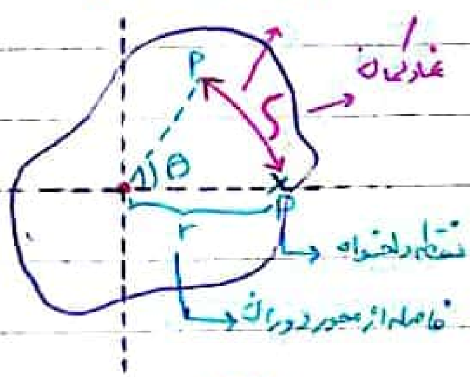
انواع دوران:
- ساعتگرد
- پادساعتگرد

- در دوران چیزی که از هر چیز دیگر برای ما اهمیت دارد این است که یک نقطه داریم و از اینش یک خط دورانی.

@tehranMarkaz_BME

- جابه‌جایی‌ها در حرکت دورانی بر اساس زاویه هستند.

$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ (Rad) → در فیزیک ۱۰ واحد را رادیان Rad می‌گیریم



* همه‌ی محورهای حالیدی برای ما عمود بر سطح هستند.

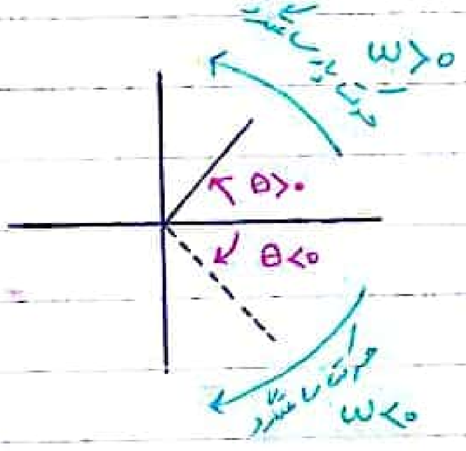
* جهت ω: هر مسیر دایره‌ای لزوماً دوران نیست.

* 1 revers = ۳۶۰ → یعنی یک دور کامل دایره

- تعریف سرعت: تغییرات مکان نسبت به زمان

* سرعت زاویه‌ای: $\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow (Rad/s)$

* سرعت لحظه‌ای: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$



- تعریف شتاب: تغییرات سرعت نسبت به زمان

* شتاب زاویه‌ای: $\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \rightarrow (Rad/s^2)$

* شتاب لحظه‌ای: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

* نکته: هنگامی که می‌گوییم شتاب داریم، یعنی تغییرات سرعت داریم.

Year. Month. Day. Subject.

• سرعت زاویه‌ای ثابت: هرگاه در زمان‌های یکسان، زاویه‌های یکسان طی شود، می‌گوییم سرعت زاویه‌ای ثابت است.

• سرعت زاویه‌ای متغیر: هرگاه در زمان‌های یکسان جابجایی‌های متفاوت طی شود، می‌گوییم سرعت زاویه‌ای متغیر است.

* نکته مهم: دوران یک حرکت شتابدار است. ($\alpha \neq 0$)

دو مثال در ذهنیت اشتباه:
- حرکت زمین به دور خود دورانی نیست زیرا شتاب ندارد و زمانش ثابت است (۲۴ ساعت)
- گردش زمین به دور خورشید هم دورانی نیست زیرا شتاب ندارد و زمانش ثابت است (۳۶۵ روز)

* معادلات و روابط حرکت دورانی:

معادل‌سازی‌ها		
$x \to \theta$	$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$	مکان ـ زمان
$v \to \omega$	$v = at + v_0 \Rightarrow \omega = \alpha t + \omega_0$	سرعت ـ زمان
$a \to \alpha$	$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$	مستقل از زمان
$F \to \tau$	$x = \frac{v+v_0}{2}t + x_0 \Rightarrow \theta = \frac{\omega+\omega_0}{2}t + \theta_0$	مستقل از شتاب
$m \to I$	$x = vt + x_0 \Rightarrow$ ✗	* زیرا فرمول حرکت یکنواخت است ولی قبلاً گفتیم که شرط دوران وجود شتاب است پس $\alpha \neq 0$

چون سرعت داره کاهش پیدا میکنه، پس باید در آخر مسئله، شتاب منفی در بیاید.

مثال ۱: سرعت زاویه‌ای چرخ دستی از $40\,rev$ از $1{,}5\,R/s$ به 0 می‌رسد.
الف) چه مدت طول می‌کشد تا چرخ متوقف شود؟
ب) شتاب زاویه‌ای آن چقدر است؟
ج) مدت زمان چرخیدن ۲۰ دور اول از ۴۰ دور چقدر است؟

الف/ $\theta = 40 rev = 40 \times 2\pi = 80\pi = 240\,Rad$ (π = ۳٫۱۴)

$\omega_0 = 1{,}5 \to \omega = 0$

$\theta = \frac{\omega + \omega_0}{2}t + \theta_0$ ($\omega = 0$, $\theta_0 = 0$)

$240 = \frac{1{,}5}{2}t \to t \simeq 320s$

ب/ $\omega = \alpha t + \omega_0 \to 0 = \alpha(320) + 1{,}5$

$\alpha = -\frac{1{,}5}{320} = 0{,}004\,R/s^2$

ج/ $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$ ($\theta_0 = 0$)

$(20 \times 2\pi) = -\frac{1}{2}(0{,}004)t^2 + 1{,}5t$

جواب $\begin{cases} t_1 > 0 \\ t_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow < 320 s$

* نکته قسمت ج مثال قبل: در حرکت دورانی همیشه هر دو زمان به دست آمده از دو معادله درجه دوم مثبت است ولی آن پاسخی را انتخاب می‌کنیم که با توجه به خواسته صورت مسئله، مقدار بیشتر یا کمتر بخواهد - مثلاً در قسمت ج سوال قبل باید پی ببریم که زمان ۰ تا ۲۰ از زمان ۰ تا ۴۰ کوچکتر است و صورت مسئله زمان ۲۰ دور اول یعنی ۰ تا ۲۰ را خواسته درحالی که ما ۰ تا ۴۰ را ۳۲۰ ثانیه به دست آوردیم. پس زمانی را انتخاب می‌کنیم که از ۳۲۰ کوچکتر باشد.

مثال ۴۲: فرفره‌ای با شتاب زاویه‌ای $\alpha = 5t^3 - 4t$ می‌چرخد. در $t=0$ سرعت زاویه‌ای فرفره $5\,R/s$ و مکان آن در $\theta = 2\,Rad$ است.

الف) سرعت زاویه‌ای آن؟

ب) مکان زاویه‌ای آن؟

الف/ $\alpha = \frac{d\omega}{dt} \to d\omega = \alpha\, dt \to \omega = \int \alpha\, dt$

$\omega = \int 5t^3 + 4t\, dt = \frac{5}{4}t^4 - \frac{4}{2}t^2 + C$

این ثابت در انتگرال یعنی اگر t ها صفر شوند این به ما سرعت اولیه را می‌دهد. ⟵ $\omega_0 = 5$ ⟵ اینجا به جای t ها ۰ می‌ذاریم که جواب ۵ بشه تا مثال درست بشه

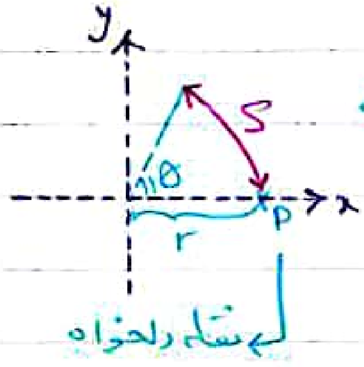
ب/ $\omega = \frac{d\theta}{dt} \to d\theta = \omega\, dt \to \theta = \int \omega\, dt = \int \left(\frac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5\right) dt =$

$\frac{5}{4}\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + 5t + C \leftarrow \theta_0 = 2$

* نکته مثال بالا: چرا در مثال از فرمول‌های ص قبل استفاده نکردیم؟ جواب: چون در اینجا شتاب متغیر داریم و معادلات ص قبل فقط برای شتاب ثابت قابل استفاده است.

* α
- ثابت ⟸ استفاده از ۴ معادله‌ها
- متغیر ⟸ استفاده از تعاریف اولیه

* ارتباط بین متغیرهای خطی و دورانی:



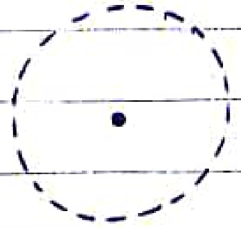
فرمول طول کمان

$S = r\theta\ (Rad)$ $\xrightarrow{\text{دیفرانسیل می‌گیریم}}$ $\frac{dS}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = r\omega$ ✓ (فرمول سرعت خطی)

$v = r\omega$ $\xrightarrow{\text{دیفرانسیل می‌گیریم}}$ $\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a = r\alpha$ ✓ (فرمول شتاب خطی)

Scanned by CamScanner

* نکته مهم:



$2\pi r$ = محیط دایره

θr = طول کمان

πr = نیم محیط دایره

θr = طول کمان

* نکته بسیار مهم: در حرکت دورانی ω تغییر نمی‌کند و برای تمام ذرات یکسان است.

• مفهوم جمله‌ی بالا: یعنی سرعت تک تک ذرات برابر سرعت خود سیستم است حال اگر سرعت سیستم مثلاً دو واحد تغییر کند مثلاً دو واحد افزایش یابد، سرعت تک تک ذرات سیستم هم دو واحد افزایش می‌یابد.

* از نکته: در حرکت دورانی v متغیر است اما به مکان اجزای سیستم (r) ارتباط دارد و بسته به آن سرعت متفاوت می‌شود طبق رابطه زیر، اجزایی که نزدیک محور دوران هستند v کوچکتری نسبت به اجزای دورتر دارند:

$$v_{(i)} = r_i \omega$$

← اندیس شمارشی

* در دایره، خطوط مماس برای ما اهمیت دارند و در حرکت دورانی، مماس بر مسیر حرکت به ما سرعت را نشان می‌دهد.

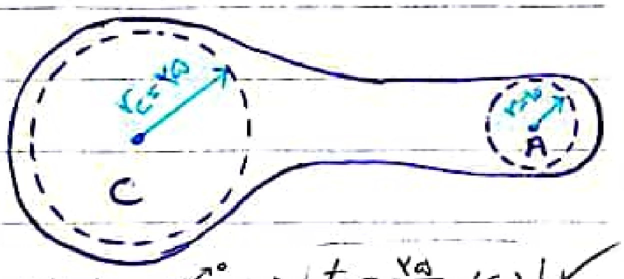
مثال ۳: چرخ A به شعاع 10cm توسط تسمه‌ای به چرخ C به شعاع 25cm متصل می‌باشد و از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. آهنگ افزایش سرعت چرخ A، $1.4 \frac{Rad}{s^2}$ است. مدت زمان لازم برای رسیدن سرعت زاویه‌ای چرخ C به $100 \frac{rev}{min}$ را به دست آورید.

$\omega_0 = 0 \quad \alpha = 1.4 \frac{Rad}{s^2} \quad \omega_C = 100 \frac{rev}{min}$

$t = ?$

$\omega_A \neq \omega_C$

$\alpha_A \neq \alpha_C$ → نکته ↓



$v_C = v_A \rightarrow r_C \omega_C = r_A \omega_A \rightarrow (25)(100) = 10\omega_A$

$\omega_A = 250 \frac{rev}{min} \times \frac{2\pi}{60} = 25 \frac{Rad}{s} \Rightarrow \omega_A = \alpha_A t + \omega_0 \Rightarrow t = \frac{25}{1.4} (s)$ ✓

* نکته که در جواب بالا: این دو چرخ ω هایشان با هم فرق می‌کند پس قطعاً α هایشان هم با هم فرق می‌کند. چراکه به ازای هر یک دور چرخش چرخ C، چرخ A باید ۲/۵ دور بچرخد.

* سرعت خطی دو چرخ برابر است زیرا توسط تسمه با هم در ارتباط هستند هر دو چرخ.

* آهنگ افزایش یا آهنگ سرعت، همان شتاب است.

Scanned by CamScanner

* انرژی جنبشی دورانی:

- پاسخ به یک سوال برای شروع: از کجا بفهمیم K ای که در رابطه پایین نوشته ایم، برای یک حرکت خطی است یا دورانی؟

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \dots + \frac{1}{2}m_nv_n^2$$

- پاسخ: از آنجایی که اندیس vها متفاوت است پس نشان می دهد rهای متفاوتی داریم درحالی که اگر حرکت خطی بود، rهای یکسانی داشتیم. ⇐ مهم

نکته: در حرکت خطی vها برابرند اما در حرکت دورانی ωها برابرند.

* نکته: در حرکت خطی جرم داشتیم که مکان و جایگاه قرارگیری این جرم برایمان مهم نبود درحالی که در حرکت دورانی مکان جرم نیز برای مهم است.

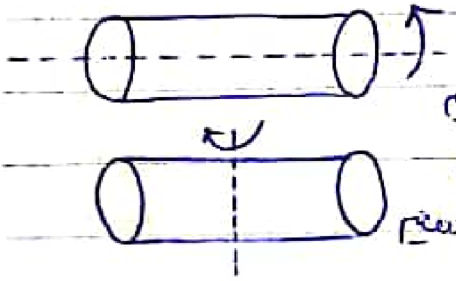
نکته: m (خطی) ← I (دورانی) ⇐ $(kg\,m^2)$ ⇐ کمیت اسکالر

$$K_{\text{دورانی}} = \frac{1}{2}m_1(r_1\omega)^2 + \frac{1}{2}m_2(r_2\omega)^2 + \dots + \frac{1}{2}m_n(r_n\omega)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2 \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{2}I\omega^2}$$ مهم ✓

به این می گویند لختی دورانی I

* یک موضوع و نکته مهم: فرض کنیم دو استوانه ی زیر را که از هر جهت و حتی شکل و اندازه با هم برابرند را داریم:



$I_1 < I_2$

$K_1 < K_2$

* برای ما راحت تر است که حول شعاع ① دوران دهیم. فاصله دورانی حالت ② بیشتر اما سخت تر است.

* قانون دوم نیوتن:

$\sum F = ma$ ⇐ برای حرکت خطی

$\tau = I\alpha$ ⇐ برای حرکت دورانی

Scanned by CamScanner

Year. Month. Day. Subject.

* لختی دورانی:

- لختی دورانی را با I نشان می‌دهند. معادل m در حرکت خطی است. واحد آن kgm^2 است.

* نکته مهم: لختی دورانی کاملاً به محور دوران وابسته است.

- لختی دوران در سیستم‌های جرمی:
  - ① سیستم گسسته ← $I=\sum m_i r_i^2$
  - ② سیستم پیوسته ← $I=\int r^2 dm$

dm ← این یعنی یک مقدار خیلی کم از جرم

مثال ۴: دو ذره‌ی جرمی یکسان به جرم m در دو انتهای میله‌ی بدون جرمی به طول ℓ قرار دارند.

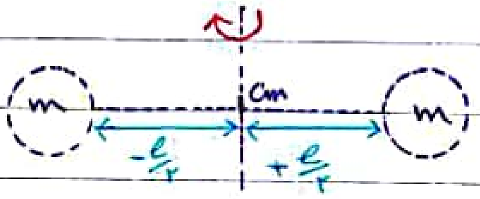
الف) لختی دورانی این سیستم را حول محوری که از مرکز جرم می‌گذرد به دست آورید.

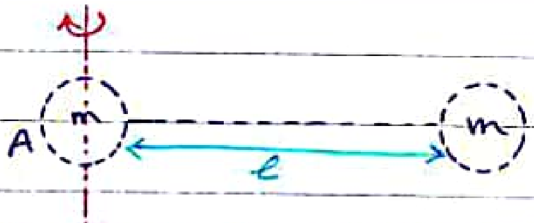
ب) لختی دورانی را حول انتهای سمت چپ میله محاسبه کنید.

جواب الف/ $I_{cm}=\sum m_i r_i^2$

$=m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2+m\left(-\frac{\ell}{2}\right)^2$

$=2m\frac{\ell^2}{4}=\boxed{\frac{1}{2}m\ell^2}$





جواب ب/ $I_A=\sum m_i r_i^2$

$=m\ell^2+m(0)=\boxed{m\ell^2}$

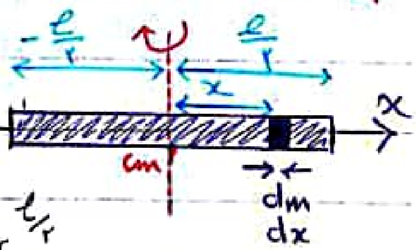
مثال ۵: میله‌ای به جرم M و طول ℓ بر روی محور x قرار دارد. لختی دورانی این میله را:

الف) حول محوری که از مرکز جرم آن به صورت عمود می‌گذرد به دست آورید.

ب) حول محوری که از انتهای سمت چپ میله می‌گذرد محاسبه کنید.

جواب الف/

$I_{cm}=\int r^2 dm=\int x^2 dm$



خب حالا به جرم باید معادل‌سازی کنیم و از m به x که کمیت فاصله‌سنجی است برسیم چون m و x دو کمیت کاملاً بی‌ربط به هم هستند.

$M \quad \ell$

$dm \quad dx$ (دیف می‌گیریم) نتیجه می‌شود $\boxed{dm=\frac{M}{\ell}dx}$

$\int x^2 dm=\int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2\left(\frac{M}{\ell}dx\right)=\frac{M}{\ell}\times\frac{1}{3}x^3\Big|_{-\ell/2}^{\ell/2} \Rightarrow I_{cm}=\frac{1}{3}\times\frac{M}{\ell}\left[\frac{\ell^3}{8}-\left(-\frac{\ell^3}{8}\right)\right]$

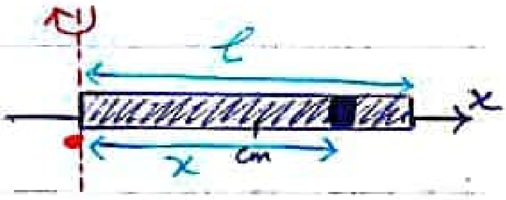
$$\boxed{I_{cm}=\frac{1}{12}M\ell^2}$$

Scanned by CamScanner

جواب ب / $I_0 = \int r^2 dm = \int x^2 dm$

$$= \int_0^{\ell} x^2 \left(\frac{M}{\ell} dx\right) = \frac{M}{\ell} \times \frac{1}{3} x^3 \Big]_0^{\ell}$$

$$I_0 = \frac{1}{3} \times \frac{M}{\ell} \left[\ell^3 - (0)\right] = \boxed{\frac{1}{3} M\ell^2}$$

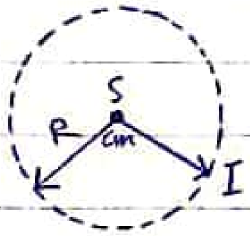


مثال ۵۶: حلقه‌ای به جرم M و شعاع R در نظر بگیرید. لختی دورانی حلقه را حول محوری که از مرکز جرم می‌گذرد و عمود بر صفحه‌ی حلقه است را به دست آورید.

$I_{cm} = \int r^2 dm = \int R^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$

از این ما که در فیزیک ماند را با جرم برای جا به جا کنیم هم دهید

همین دلیل M بزرگ را جایگذاری می‌کنیم

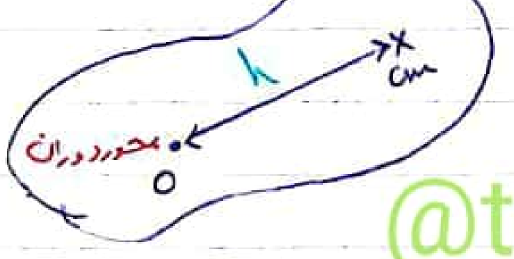


مثال ۵۷: میله‌ای به جرم M و طول ℓ بر روی محور x قرار دارد. لختی دورانی میله را حول محوری که از مرکز جرم به موازات میله می‌گذرد را به دست آورید.

$r = 0 \xrightarrow{\text{پس}} I_{cm} = 0 \Rightarrow$ زیرا جرم‌ها فاصله‌ای از محور دوران ندارند.

* قضیه محورهای موازی:

این قضیه روشی است برای به دست آوردن لختی دورانی حول هر محوری به غیر از محور عبوری از مرکز جرم. در این قضیه باید فاصله‌ی مرکز جرم تا محور دوران را (h) بدانیم همچنین لختی دورانی مرکز جرم به موازات محور دوران را نیز اطلاع داشته باشیم. سپس از رابطه زیر می‌توانیم لختی دورانی را حول هر محوری به دست آوریم:



$$I_0 = I_{cm} + Mh^2$$

@tehranMarkaz_BME

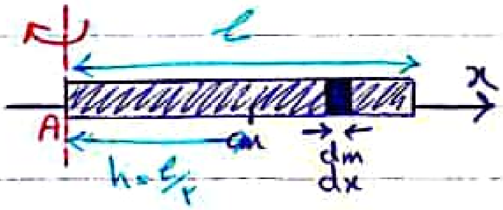
Scanned by CamScanner

مثال ۸: طبق قضیه محورهای موازی، لختی دورانی را حول دو محور A و B مطابق اشکال به دست آورید.

$I_A = I_{cm} + Mh^2$

$I_A = \frac{1}{12}Ml^2 + M(\frac{l}{2})^2$

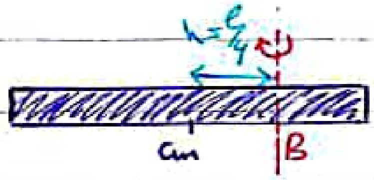
$I_A = (\frac{1}{12} + \frac{1}{4})Ml^2 = \boxed{\frac{1}{3}Ml^2}$



$I_B = I_{cm} + Mh^2$

$I_B = \frac{1}{12}Ml^2 + M(\frac{l}{6})^2$

$I_B = (\frac{1}{12} + \frac{1}{36})Ml^2 = \boxed{\frac{1}{9}Ml^2}$



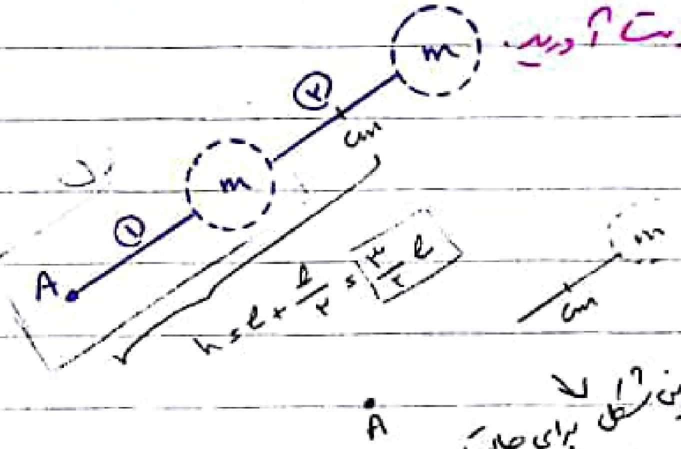
مثال ۸۹: دو میله به طول l و جرم M به دو ذره‌ی یکسان به جرم m مطابق شکل متصل هستند، حول محوری که از A به صورت عمود می‌گذرد، دوران می‌کنند. لختی دورانی این سیستم را حول A به دست آورید.

$I_1 = \frac{1}{3}Ml^2 \rightarrow$ طبق مثال‌های قبل

$I_2 = (\frac{1}{12} + \frac{9}{4})Ml^2$

$I_3 = \sum m_i r_i^2 = ml^2 + m(2l)^2 = \boxed{5ml^2}$

$I_A = I_1 + I_2 + I_3$ ✓



این شکل برای حالت دوم است.

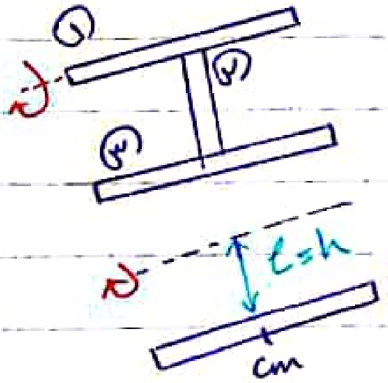
مثال ۸۱۰: سه میله‌ی یکسان هر یک به طول l و جرم M مطابق شکل به صورت حرف H به یکدیگر متصل می‌باشند. سیستم از حالت افقی چرخیده و به صورت قائم در می‌آید. لختی دورانی را حول محور دوران محاسبه کنید.

$I_1 = 0 \xrightarrow{\text{زیرا}} r = 0$

$I_2 = \frac{1}{3}Ml^2 \xrightarrow{\text{زیرا}}$ حول انتهای خود دوران می‌کند.

$I_3 = I_{cm} + Mh^2 \rightarrow \boxed{I_3 = Mh^2}$

$I_{Total} = I_1 + I_2 + I_3$



Scanned by CamScanner

مثال ۸۱۱ میله نازکی به طول ۲m حول محوری که از انتهای آن عبور کرده می‌تواند بچرخد. میله در زاویه ۳۰ درجه بالای افق از حالت سکون رها می‌شود. سرعت زاویه‌ای میله هنگامی که به حالت افقی می‌رسد، چقدر می‌باشد؟

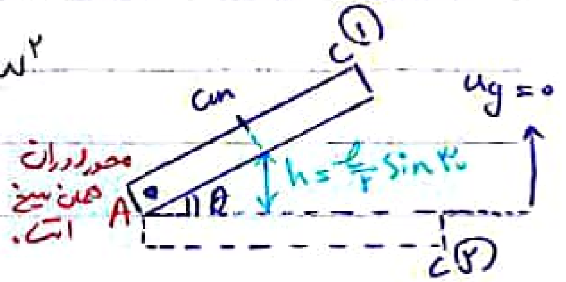
* نکته مهم: برای به دست آوردن ارتفاع، از نقطه cm استفاده می‌کنیم همیشه.

$E_1 = E_2$

$mgh = \frac{1}{2} I_A \omega^2 \rightarrow mg(\frac{l}{2}\sin 30) = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}Ml^2)\omega^2$

$5 = \frac{1}{3}\times 2\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{15}{2}}$

$V_A = 0 \quad V_C = r\omega = l\omega = 2\sqrt{\frac{15}{2}}$



* عامل حرکت دورانی:

• قانون دوم نیوتن نشان دهنده عامل حرکت دورانی است.

عامل حرکت:
- در حرکت خطی ← $\vec F$ ← (N) برداری
- در حرکت دورانی ← گشتاور ← $\vec\tau$ (تاو) برداری

* گشتاور به موارد زیر ربط داشته و متناسب است:

$\tau \propto$ ① $\vec F$ ② $\vec r$ ③ $\sin\theta$

* $\vec r$ همان نقطه اثر نیرو تا محور دوران است یعنی از محور دوران به کنار نیرو

* نکته مهم: برای تعیین جهت گشتاور از قانون دست راست استفاده می‌کنیم به این صورت که چهار انگشت در جهت r (از محور دوران به سمت نیرو)، چرخش چهار انگشت در جهت F و انگشت شست در جهت τ خواهد بود.

$|\tau| = Fr\sin\theta = rF\sin\theta$

$\vec\tau = \vec r \times \vec F$ (N.m)

← اینجا اگر جای r و F را عوض کنیم پس باید در یک منفی هم ضرب کنیم ولی در بالایی این طور نیست.

$\tau < 0$ ← ساعتگرد

$\tau > 0$ ← پادساعتگرد

Scanned by CamScanner

* چند نکته مهم:

① اگر میله حول انتهایش دوران کند خواهیم داشت: $I_{cm} = \frac{1}{3} M l^2$

② اگر محور دوران میله، عمود بر cm باشد، خواهیم داشت: $I_{cm} = \frac{1}{12} M l^2$

③ اگر محور دوران میله به موازات خودش باشد، خواهیم داشت: $I_{cm} = 0$

مثال ۱۲: قرقره ای یکنواخت به جرم M و شعاع R، از روی آن ریسمان عبور کرده است و به جسم کوچکی به جرم m متصل می باشد.

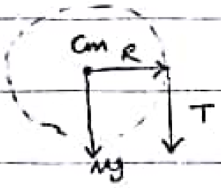
الف) شتاب حرکت جسم؟

ب) شتاب زاویه‌ای قرقره؟

ج) کشش طناب را به دست آورید.

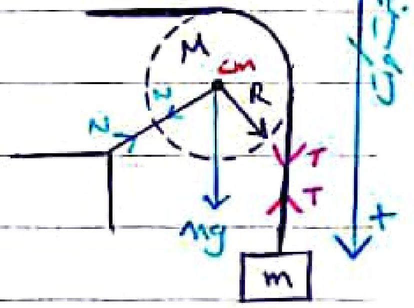
جواب الف / قانون دوم نیوتن برای حرکت دورانی: $\tau_{net} = I\alpha$ $\tau_{mg} = 0 \xrightarrow{\text{زیرا}} r = 0$

$\tau = rF\sin\theta$ $\tau_N = 0$



- از طرفی با قاعده دست راست و شکل در بر فهمیدیم که در جهت ساعتگرد است.

$\tau_T = -RT\sin 90$



جواب ج

حرکت خطی: $\Sigma F = ma \to mg - T = ma$ ②

حرکت دورانی: $\tau_{net} = I_{cm}\alpha \to -RT = \frac{1}{2}MR^2 \to -T = \frac{1}{2}Ma$ ①

$\xRightarrow{①,②} mg + \frac{1}{2}Ma = ma \to a = \frac{mg}{m - \frac{M}{2}}$ $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$

جواب ب / $a = r\alpha$, $a = R\alpha$, $\alpha = \frac{a}{R}$

* نکات مثال بالا:

* در این مثال دو نوع حرکت داشتیم؛ یکی دوران قرقره و یکی حرکت خطی جسم متصل به طناب.

* محور دوران قرقره، cm آن است که در اینجا همان مرکز دایره بود.

* دو نکته مهم:

① نیروهایی که بر روی محور دوران ایجاد می‌شوند، گشتاور ندارند. (مانند Mg و N در مثال قبل)

② همیشه جهت حرکت در حرکت خطی، مثبت است.

Scanned by CamScanner

Year. Month. Day. Subject.

مثال ۱۳: قرقره‌ای یکنواخت وجود دارد که طنابی بدون در آن عبور کرده و دو جرم m_1, m_2 به آن متصل هستند.

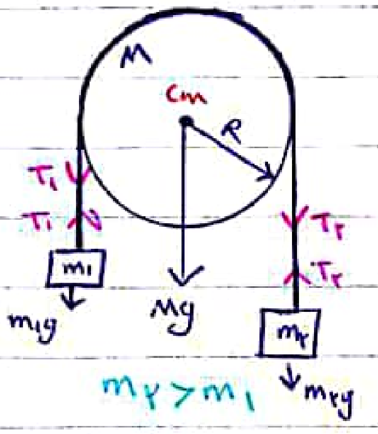
الف) شتاب جرم ها؟

ب) کشش طناب در دو سمت را بدست آورید.

جواب الف / $\begin{cases} a = 2\alpha \\ a = R\alpha \end{cases}$

جواب ب / حرکت دورانی قرقره: $\tau_{Mg} = 0 \xrightarrow{\text{زیرا}} r = 0$

چرا ؟ $T_2 - T_1$



$\begin{cases} \tau_{T_1} = R T_1 \\ \tau_{T_2} = -R T_2 \end{cases} \Rightarrow \tau_{net} = R(T_1 - T_2) \rightarrow$ با قانون دست راست علامت τ ها را مشخص کردیم.

$\tau_{net} = I_{cm}\alpha \rightarrow R(T_1 - T_2) = \frac{1}{2} M R^2 \frac{a}{R}$

$\Rightarrow \boxed{T_1 - T_2 = \frac{1}{2} M a}$ (1)

حرکت انتقالی m_1: $\Sigma F = m_1 a \rightarrow \boxed{T_1 - m_1 g = m_1 a}$ (2)

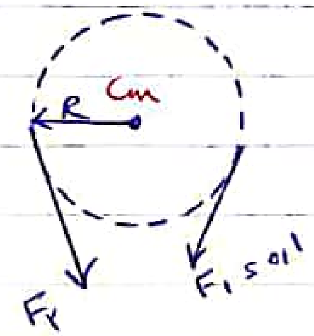
حرکت انتقالی m_2: $\Sigma F = m_2 a \rightarrow \boxed{m_2 g - T_2 = m_2 a}$ (3)

(1),(2),(3): حل دستگاه ۳ معادله ۳ مجهول

[illegible]

مثال ۱۴: قرص یکنواختی می‌تواند حول محورش بچرخد. شعاع قرص $2cm$ است و جرم آن $4gr$ در ابتدا در حالت سکون قرار دارد. در زمان $t=0$ دو نیروی مماس بر لبه‌ی قرص وارد می‌شوند. بطوری که در $t=1{,}25s$ سرعت زاویه‌ای قرص $250 \frac{Rad}{s}$ پادساعتگرد است. نیروی F_1 برابر $\frac{1}{10} N$ می‌باشد. F_2 چقدر است؟

$\omega = \alpha t + \omega_0 \rightarrow 250 = \alpha (1{,}25) \rightarrow \boxed{\alpha = 200 \frac{rad}{s^2}}$



$\tau_{F_1} = -R F_1 = -0{,}1 R$

$\tau_{F_2} = R F_2 = F_2 R$

$\tau_{net} = R(F_2 - F_1) \rightarrow \tau_{net} = R(F_2 - 0{,}1)$

$\tau_{net} = I_{cm}\alpha \rightarrow R(F_2 - 0{,}1) = \frac{1}{2} M R^2 (200)$

$\boxed{F_2 = 0{,}1 + 100 M R}$

Scanned by CamScanner

مثال ۱۵: چرخی به شعاع ۰٫۲m، طنابی بدون جرم به دور آن پیچیده شده است، به جعبه‌ای به جرم ۲kg متصل است و بر روی سطح شیب‌داری بدون اصطکاک که با افق زاویه ۳۰° می‌سازد، حرکت می‌کند. جعبه با شتاب ۲m/s² رو به پایین سطح شتاب می‌گیرد. لختی چرخشی چرخ حول محورش چقدر است؟

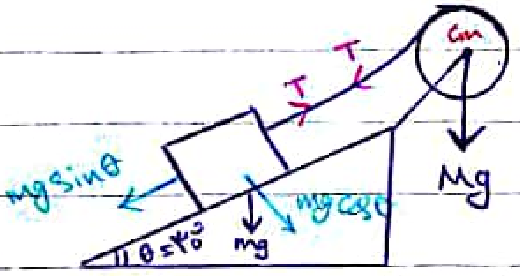
m حرکت خطی: $\Sigma F = ma \rightarrow mg \sin 30 - T = ma$

$20(\frac{1}{2}) - T = 4 \rightarrow T = 6$

حرکت دورانی: $\tau_T = RT = 1.2 \quad \tau_{mg} = 0$

$\tau_{net} = 1.2 \rightarrow \tau_{net} = I_{cm}\alpha$

$1.2 = I\alpha = I\frac{a}{R} \rightarrow I = \frac{1.2R}{a} = \frac{(1.2)(0.2)}{2}$



مثال ۱۶: در شکل زیر، دو مکعب به جرم ۶٫۲kg با نخ بدون جرمی که از روی قرقره‌ای به شعاع ۲٫۴cm می‌گذرد به هم متصل اند. لختی چرخشی قرقره 7.4×10^{-4} است. این نخ هیچ لغزشی روی قرقره ندارد. ولی معلوم نیست بین میز و جسم لغزنده اصطکاک وجود دارد یا خیر. محور قرقره بدون اصطکاک است. وقتی این دستگاه از حال سکون رها شود، قرقره در مدت ۹۱ms به اندازه ۱٫۳۰ Rad می‌چرخد. شتاب دو جسم ثابت است.

الف) بزرگی شتاب زاویه‌ای قرقره؟

ب) بزرگی شتاب هر جسم؟

ج) کشش نخ T_1؟

د) کشش نخ T_2؟

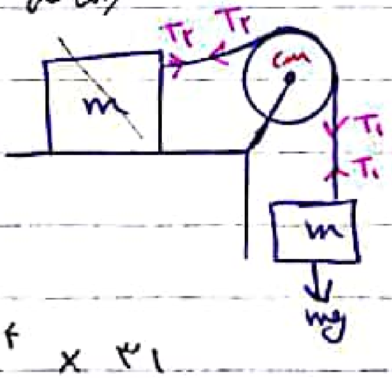
جواب الف / $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$

$0.13 = \frac{1}{2}\alpha(91 \times 10^{-3})^2 \rightarrow \alpha = \frac{0.26}{91 \times 10^{-3}} \simeq 31 \, Rad/s^2$

جواب ب / $a = r\alpha \rightarrow a = R\alpha$

$a = (2 \times 10^{-2})(31) = 0.62 \, m/s^2$

دستگاه فوق



جواب ج / $\Sigma F = ma \rightarrow mg - T_1 = ma$

$60 - T_1 = 6(0.62) \rightarrow T_1 = 60 + 3.72 \; (N)$

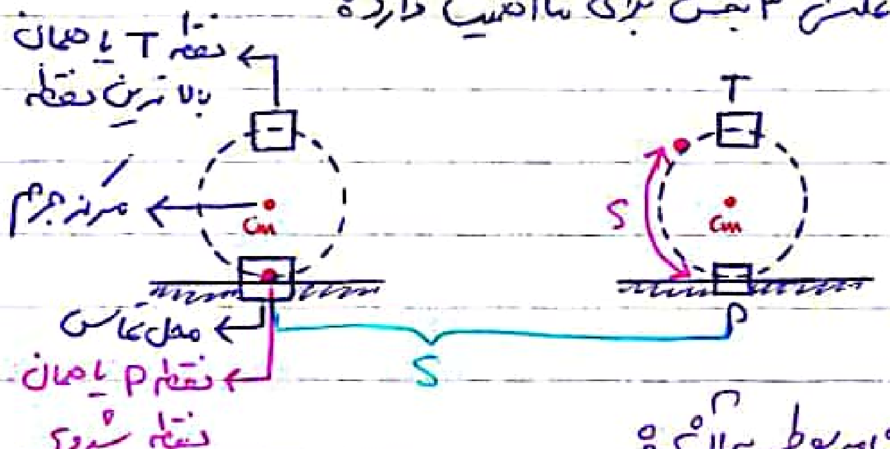
حرکت دورانی: $\tau_{net} = I_{cm}\alpha \rightarrow R(T_2 - T_1) = 7 \times 10^{-4} \times 31$

جواب د

Scanned by CamScanner

فصل یازدهم - غلتش :

• با توجه به شکل زیر، در هر حرکت غلتشی ۳ بخش برای ما اهمیت دارد:

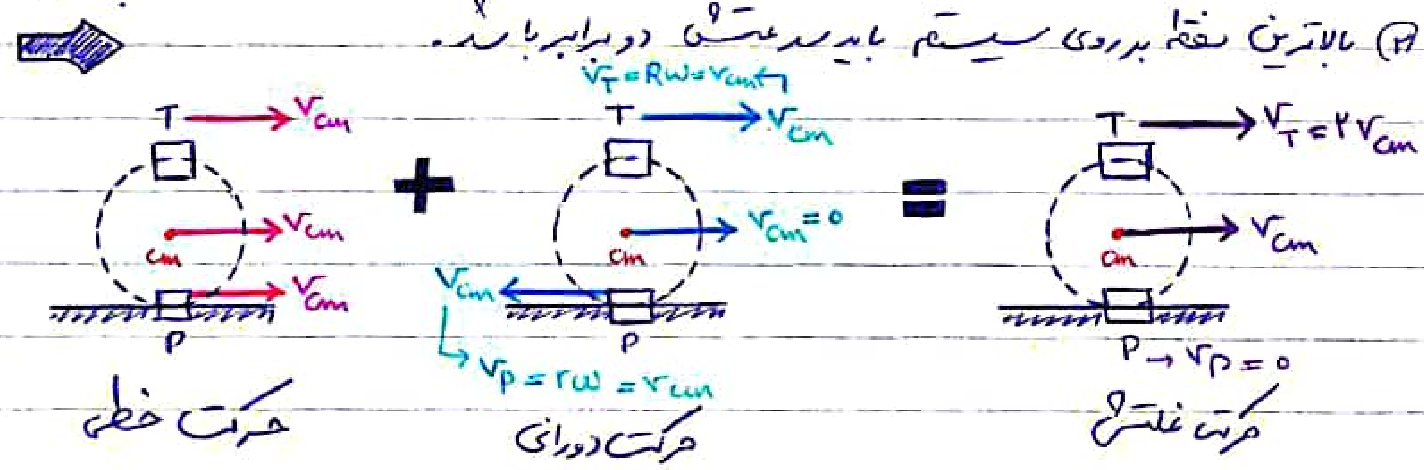


① مرکز جرم
② محل تماس با سطح
③ بالاترین نقطه که روی سیستم وجود دارد.

* سینماتیک غلتش و نکات مربوط به آن:

- شرط: باید دو ویژگی زیر حتماً برقرار باشد:

① محل تماس سرعتش صفر باشد.
② بالاترین نقطه بر روی سیستم باید سرعتش دو برابر باشد.



• همانطور که در شکل بالا می‌بینیم، در حرکت غلتشی دو جور حرکت داریم.

• در حرکت غلتشی همه‌ی اجزای سیستم با سرعتی هم‌اندازه با سرعت مرکز جرم حرکت خطی انجام می‌دهند و از طرفی ذرات سیستم حول محور دوران عبوری از مرکز جرم حرکت دورانی دارند. در نتیجه، حرکت غلتشی ترکیبی از حرکت خطی و حرکت دورانی حول مرکز جرم می‌باشد.

• یک تفاوت مهم: r در دوران با r در غلتش فرق می‌کند. r در غلتش حتماً راجع به شعاع است ولی در دوران لزوماً r شعاع نیست.

• در حرکت غلتشی ما فقط می‌توانیم سرعت خطی مرکز جرم را به دست آوریم یعنی cm ولی در دوران می‌توانستیم سرعت خطی هر چیزی را به دست آوریم.

$$S = r\theta \longrightarrow \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \longrightarrow v_{cm} = R\omega$$

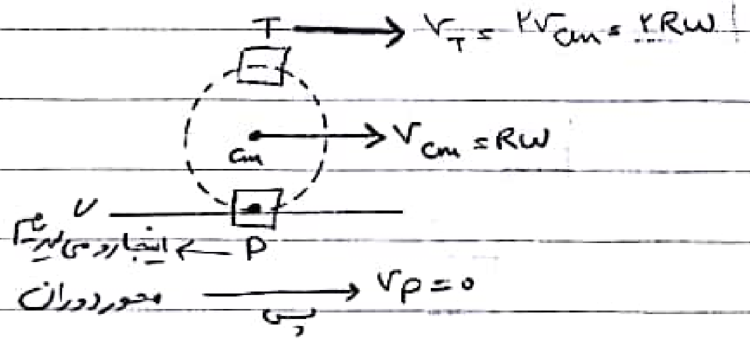
Scanned by CamScanner

Year. Month. Day. Subject.

* نکته مهم: محور دوران در حرکت دورانی سرعت نمی‌دهد پس سرعت سیستم را نیز تعیین نمی‌کند بلکه سرعت سیستم را سرعت خطی آن تعیین می‌کند.

مثال ۱: حرکت غلتشی را در یک چرخ صرفاً توسط یک حرکت دورانی ایجاد کنید.

* نکته یادآوری: در حرکت دورانی هر نقطه‌ای را که محور دوران بگیریم سرعتش صفر خواهد شد.



پاسخ تشریحی: محور دوران را به نقطه تماس انتقال می‌دهیم.

* انرژی جنبشی غلتشی:

* نکته یادآوری: هر حرکت چون سرعت دارد، پس حرکت جنبشی نیز دارد.

- براساس جواب مثال ۱ خواهیم داشت:

$$K_{غلتشی} = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \rightarrow K = \frac{1}{2}(I_{cm} + MR^2)\omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} m (R\omega)^2$$

$$K_{غلتشی} = \underbrace{\frac{1}{2} I_{cm} \omega^2}_{\text{حرکت دورانی مرکز جرم}} + \underbrace{\frac{1}{2} M v_{cm}^2}_{\text{حرکت خطی مرکز جرم}}$$

(cm) مهم و حتماً باید نوشته شود.

مثال ۲: گلوله‌ای توپر از حال سکون در ارتفاع ۶ متری بر روی مسیر می‌غلتد تا به پایان مسیر در ارتفاع ۲ متری می‌رسد. گلوله در چه فاصله‌ی افقی از نقطه A با کف زمین برخورد می‌کند؟

جواب / بخش اول حرکت غلتشی $\rightarrow E_B = E_C$

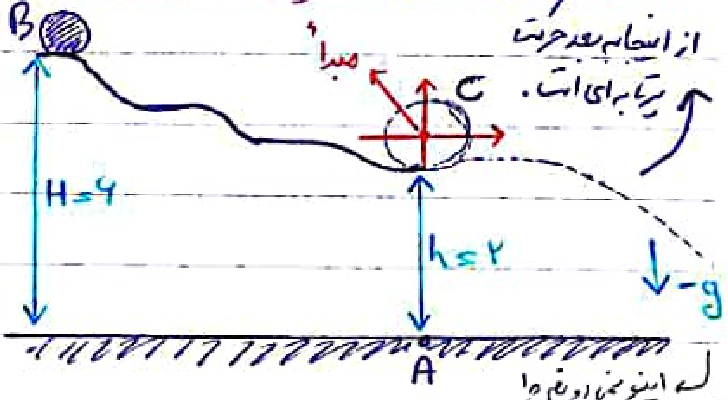
$K_B + U_B = K_C + U_C$ (صفر ← K_B، غلتشی ← K_C)

$6mg = (\frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} m v_{cm}^2) + 2mg$

$4mg = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} m r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{cm}^2$

(← به خاطر توپر بودن گلوله، $r^2\omega^2 \rightarrow v_{cm}^2$)

$4mg = \frac{7}{10} m v_{cm}^2 \rightarrow v_{cm} = \sqrt{\frac{400}{7}} \simeq 7.5$



از اینجا به بعد حرکت پرتابه‌ای است.

Scanned by CamScanner

@tehranMarkaz_BME

Year. Month. Day. Subject.

بخش دوم حرکت پرتابی → $y=-\frac{1}{2}gt^2$

$-2=-\frac{10}{2}t^2 \to t=\sqrt{\frac{2}{5}}\ s$

$x=vt+x_0 \to x=(7,5)\sqrt{\frac{2}{5}}$

← در فیزیک دانشگاهی همیشه مبدا را صفر می‌گیریم.

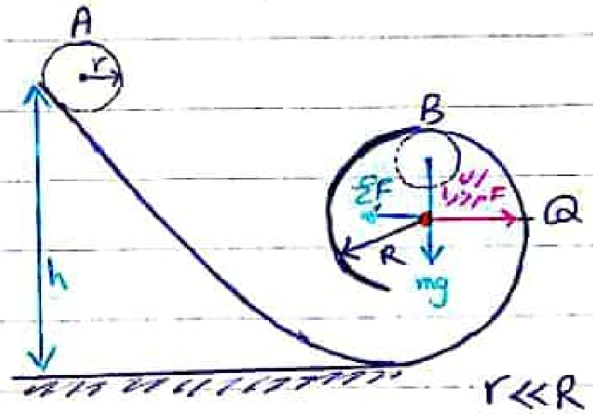
* نکته مرتبط به مثال قبل: در حرکت غلتشی توپر یا توخالی بودن جسم برایمان مهم است.

جسم توپر → $I_{cm}=\frac{2}{5}mr^2$ جسم توخالی → $I_{cm}=\frac{2}{3}mr^2$

مثال ۳: گلوله‌ای توپر به جرم ۲۸ گرم از حال سکون بر روی مسیر شکل به حرکت می‌کند. شعاع حلقه‌ی دایره‌ای $R=14cm$ است.

الف) h چقدر باشد تا وقتی گلوله به بالاترین نقطه‌ی مسیر خود می‌رسد، از سطح جدا شود؟

ب) اگر h برابر 6R باشد، نیروی وارد بر گلوله در نقطه Q چقدر است؟



جواب الف / $E_A=E_B$

$K_A+U_A=K_B+U_B$

$mgh=(\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2+\frac{1}{2}mv_{cm}^2)+mg(2R)$ ، $I_{cm}=\frac{2}{5}mr^2$

$mgh=(\frac{7}{10}mv_{cm}^2)+mg2R$

مسیر حرکت دایره‌ای
$$\begin{cases}\sum F=m\frac{v^2}{R}\\ N+mg=m\frac{v^2}{R} \quad (N=0)\\ v^2=Rg\end{cases}$$

$gh=\frac{7}{10}Rg+2Rg$

$h=2.7R$

$r\ll R$

← این یعنی r از R به قدری کوچک‌تر است که می‌توان از آن صرف نظر کرد.

جواب ب / $E_A=E_Q$

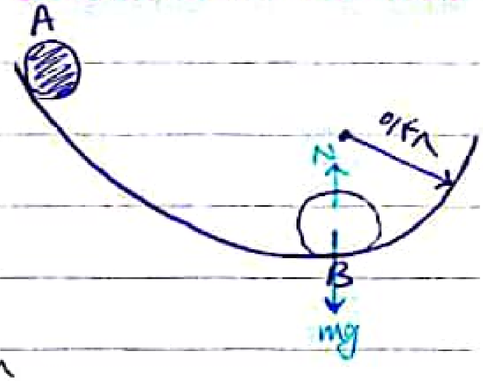
$K_A+U_A=K_Q+U_Q$

$6mgR=\frac{1}{2}mv_Q^2+mgR \to 5mgR=\frac{1}{2}mv_Q^2$

$v_Q^2=100R \to$ مسیر حرکت دایره‌ای
$$\begin{cases}\sum F=m\frac{v_Q^2}{R} \quad \text{مرکزگرا}\\ \sum F=m\frac{100R}{R}\\ \sum F=100m\end{cases}$$

Scanned by CamScanner

مثال ۴: گلوله‌ای غیر یکنواخت به جرم M و شعاع R از حالت سکون بر روی مسیری می‌غلتد و وارد ناحیه‌ای به شعاع ۰/۴۸m ره می‌شود. در پایین‌ترین نقطهٔ مسیر، نیروی عمود بر سطح 2Mg بر گلوله وارد می‌شود. اگر لختی دورانی گلوله $I = \beta MR^2$ باشد، β را پیدا کنید.



جواب/ $E_A = E_B$

$K_A + U_A = K_B + U_B$ $\rightarrow \beta MR^2$

$Mgh = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$

$gh = \frac{1}{2} v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \beta v_{cm}^2$

$$\begin{cases} \Sigma F = M\frac{v^2}{0/48} \\ 2Mg - Mg = M\frac{v^2}{0/48} \\ g = \frac{v^2}{0/48} \rightarrow v^2 = 4/8 \end{cases} \Rightarrow \frac{gh}{2/4} - 1 = \beta$$

* دینامیک غلتش:

• دینامیک یعنی عامل حرکت.

• هنگامی که می‌گوییم محل تماس سرعتش صفر است یعنی محل تماس سُر نمی‌خورد.

• در سطوح عادی که شیب‌دار نیستند، در محل تماس، نیروی اصطکاک ایستایی وارد می‌شود. جهتش خلاف جهت محل تماس و در جهت حرکت سیستم است. پس اصطکاک در سطوح عادی باید در جهت حرکت ایجاد شود.

• و اما راجع به سطوح شیب‌دار، دو نکته زیر را داریم:

حرکت غلتشی:

حرکت دورانی

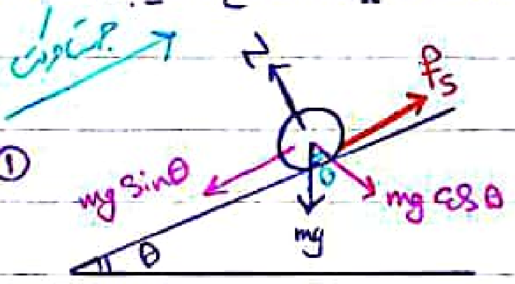
$\tau_{net} = I_{cm}\alpha$

$Rf_s = I_{cm}\frac{a}{R} \rightarrow R^2 f_s = I_{cm} a$ ①

حرکت خطی

$\Sigma F = ma_{cm}$

$f_s - mg\sin\theta = ma_{cm}$ ②



که در اینجا mg مخالف حرکت است.

حرکت غلتشی:

حرکت دورانی

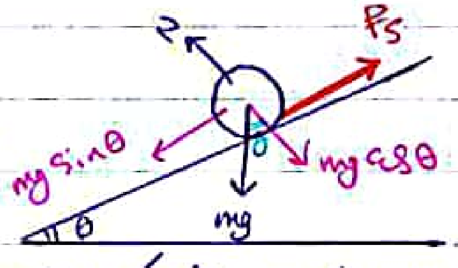
$\tau_{net} = I_{cm}\alpha$

$Rf_s = I_{cm}\frac{a}{R} \rightarrow R^2 f_s = I_{cm} a$ ①

حرکت خطی

$\Sigma F = ma_{cm}$

$mg\sin\theta - f_s = ma_{cm}$ ②



که در اینجا mg موافق حرکت است.

Scanned by CamScanner

Year. Month. Day. Subject.

فصل چهاردهم ـ دما و گرما و قانون اول ترمودینامیک:

• دما ⟵ نمادها: (θ و T) ⟵ تعریف: معیاری است برای سنجش گرمی و سردی

واحدها ⟵ F ـ k ـ C ⟸ $K = C + 273$

* بخش اول ـ بررسی در جامدات و مایعات:

ـ در جامدات ۳ نوع انبساط داریم:
۱ـ انبساط خطی (طولی)
۲ـ انبساط سطحی
۳ـ انبساط حجمی

① انبساط خطی (طولی):

$(\ell - \ell_0) = \alpha \ell_0 (\theta_2 - \theta_1)$

* $\Delta \ell = \alpha \ell_0 \Delta\theta$

α ضریب انبساط خطی است، و واحد آن $\frac{1}{k}$ یا $\frac{1}{C}$ است. ⟵ $\frac{1}{k}$ یا $\frac{1}{C}$ ⟵ بر حسب داده‌ی مسئله

نکته: دما بالا برود $\Delta\ell$ مثبت است و هر گاه پایین بیاید $\Delta\ell$ منفی خواهد بود.

② انبساط سطحی:

ـ مثل درهای ساختمان های غیر استاندارد که در تابستان به دلیل انبساط ـ در بسته شده با مشکل مواجه می شود.

* $\Delta A = (2\alpha) A_0 \Delta\theta$ ⟵ چون ۲ تا طول در نظر می‌گیریم.

③ انبساط حجمی: ⟵ $\beta = 3\alpha$

* $\Delta V = (\beta) V_0 \Delta\theta$

نکته کلی: در انبساط و انقباض، ما تبادل انرژی داریم که این تبادل انرژی به صورت انرژی گرمایی است.

* انرژی گرمایی (Q) : به دو دلیل تغییرات دما یا و تغییرات فازی به وجود می‌آید.

۱ـ دارای تغییرات دما است ⟵ $Q = mc\Delta\theta$

• ظرفیت گرمای ویژه (c): مقدار گرمایی است که به واحد جرم یک ماده می دهیم تا دمای آن به اندازه یک واحد تغییر کند. واحدهای c: $\frac{J}{C.gr}$ یا $\frac{J}{K.kg}$

Scanned by CamScanner

• دما برود بالا ، یعنی سیستم انرژی گرمایی گرفته پس Q مثبت است.

• دما بیاد پایین ، یعنی سیستم انرژی گرمایی از دست داده پس Q منفی است.

$\rightarrow J/C$ یا J/K

$* \; Q = C\Delta\theta$

• در فرمول بالا ، C را ظرفیت گرمایی گویند که عبارت است از مقدار گرمایی است که به کل سیستم داده می‌شود تا دمای آن یک واحد تغییر کند.

$* \; C = mc$

۲_ تغییر فاز :

(جامد ⇄ مایع) $Q_F = \pm m l_F$ ← گرمای نهان ذوب

نکته : در رابطه بالا به l_F گرمای نهان ذوب گویند.

که واحد آن $\frac{J}{gr}$ و J/kg یا $\frac{cal}{gr}$ ، $\frac{cal}{kg}$ است.

$1cal = 4{,}18J$

(مایع ⇄ بخار) $Q_V = \pm m l_V$

← گرمای نهان تبخیر

مثال : یک تکه مس به جرم ۷۵gr تا دمای ۳۱۲c° گرم می‌کنیم. سپس آن را درون یک ظرف شیشه‌ای دارای ۲۲۰gr آب می‌اندازیم. ظرفیت گرمایی ظرف ۴۵cal/K است و دمای اولیه‌ی آب و ظرف ۱۲c° است. دمای نهایی تکه مس، آب و ظرف را به دست آورید.

$c_{مس} = 0{,}092 \frac{cal}{K.gr}$

$c_{آب} = 1 \frac{cal}{Kgr}$

جواب : $Q_{cu} + Q_w + Q_b = 0$

$m_{cu}c_{cu}(T_F - (312)) + m_w c_w (T_F - (12)) + C_b(T_F - (12)) =$

$$T_F = \frac{m_{cu}c_{cu}(312) + m_w c_w (12) + C_b(12)}{m_{cu}c_{cu} + m_w c_w + C_b}$$

Scanned by CamScanner

مثال ۲: چه مقدار گرما باید توسط یخی به جرم ۷۲۰gr که در دمای ‎-۱۰°C قرار دارد، جذب شود تا به حالت مایع با دمای ۱۵°C تبدیل شود؟

$c_{ice} = 2220 \ J/kg.K \qquad c_w = 4190 \ J/kg.K$

$l_F = 333 \ \frac{kJ}{kg}$

جواب: یخ ‎-۱۰ $\xrightarrow{Q_1}$ یخ ۰ $\xrightarrow{Q_2}$ آب ۰ $\xrightarrow{Q_3}$ آب ۱۵

$$Q_1 = m_i c_i (0-(-10)) = 15{,}98 \ kJ$$
$$Q_2 = m_i l_F = 239{,}8 \ kJ$$
$$Q_3 = m_w c_w (15-0) = 45{,}25 \ kJ$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_T = 300 \ kJ$$

ب) اگر به یخ، فقط ۲۱۰kJ انرژی گرمایی بدهیم، حالت نهایی چیست؟

پاسخ تشریحی: حالت نهایی مخلوط آب و یخ خواهد بود چرا که در سوال قبل دما کمتر و نیاز برای ذوب کامل یخ را ۳۰۰ به دست آوردیم، درحالی که در اینجا ۲۱۰kJ گرما دادیم، پس چون ۹۰kJ کمبود گرما داریم، پس یخ کامل ذوب نشده و مخلوط آب و یخ خواهیم داشت. برای به دست آوردن جرم یخ ذوب شده داریم:

$$Q_{\text{باقی مانده}} = 210 - 15{,}98 \simeq 194 \ kJ$$

$$m_{\text{یخ ذوب شده}} = \frac{194}{l_F}$$

* بخش دوم – ترمودینامیک گازها:

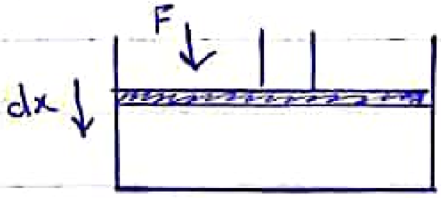
• در اینجا، تغییرات ناگهانی در سیستم نداریم.

$$w = \int F.dx$$
$$= \int (PA).dx$$

مساحت ← → جابه‌جایی

$$= \int P(A.dx)$$

تغییرات المان حجم ← dv به اسم



$$* \ W = \int_{v_i}^{v_f} P.dv$$

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\text{نیرو}}{\text{واحد سطح}}$$

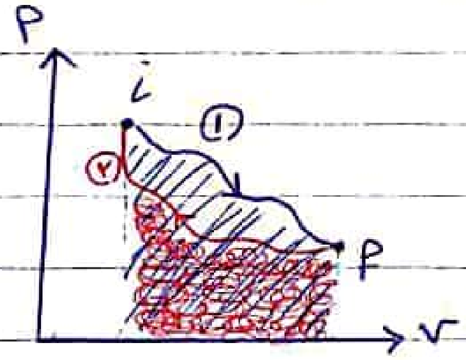
واحد ω: $[J] = [Pa.m^3]$

$* \ F = PA$

Scanned by CamScanner

• اگر انبساط در سیستم اتفاق بیفتد، کار مثبت است.
• اگر تراکم در سیستم اتفاق بیفتد، کار منفی است.

* نمودار (P-V):



• به شکل رو به رو نوعی چرخه می‌گویند زیرا مسیری را رفته و برگشته.
- W_1 مثبت است زیرا ساعتگرد رفته است.
- W_2 منفی است زیرا پادساعتگرد رفته است.
- با توجه به مساحت‌های اشغالی، W کل چرخه مثبت است زیرا W_1 مساحت بیشتری را اشغال کرده است.

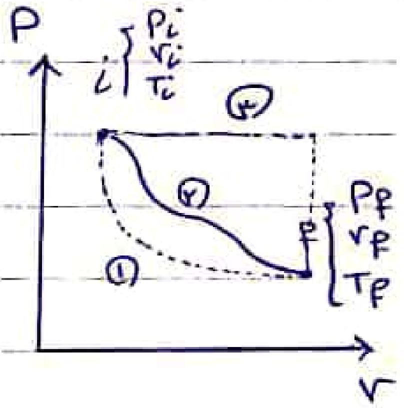
* بخش سوم - قانون اول ترمودینامیک:

به نوع فرایند بستگی دارند

$$Q_1 \neq Q_2 \neq Q_3 \neq \dots \neq Q_x$$
$$W_1 \neq W_2 \neq W_3 \neq \dots \neq W_x$$

به نوع فرایند بستگی ندارند

$$Q_1 - W_1 = Q_2 - W_2 = Q_3 - W_3 = \dots = Q_n - W_n$$
$$* \ \Delta E_{int} = Q - W$$



(۱) به نقطه ابتدا و انتهای فرایند بستگی دارد.

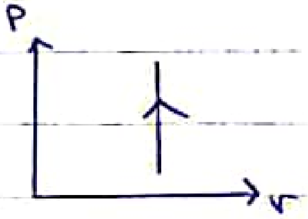
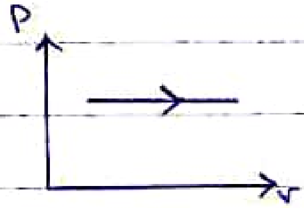
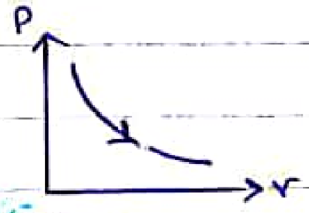
ΔE_{int} = تغییرات انرژی داخل سیستم است.

(۲) به دمای اولیه و دمای نهایی بستگی دارد.

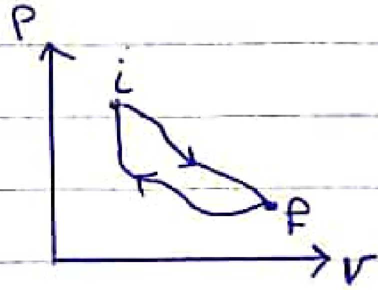
@tehranMarkaz_BME

Scanned by CamScanner

* انواع فرآیندها

هم حجم	هم فشار	بی دررو
		
$W = 0$	$W = P\Delta V$	$Q = 0$ ← تبادل گرمایی نداریم و کاملا ایزوله است.
$\Delta E_{int} = Q_V$	$\Delta E_{int} = Q_P - W$	$\Delta E_{int} = -W$

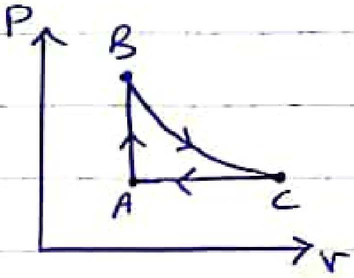
* فرآیند چرخه



$Q = W$

$\Delta E_{int} = 0$

مثال ۴۳ گازی داخل یک محفظه چرخه ی زیر را می پیماید. Q_{AB} انرژی داده شده به گاز برابر با ۲۰J است. در فرآیند BC هیچ گرمایی مبادله نمی شود و کار خالص انجام شده در چرخه ۱۵J است. انرژی گرمایی در طی فرآیند CA را به دست آورید.



جواب:

$\Delta E_{int} = 0 \qquad Q_{\text{چرخه}} = W_{\text{چرخه}}$

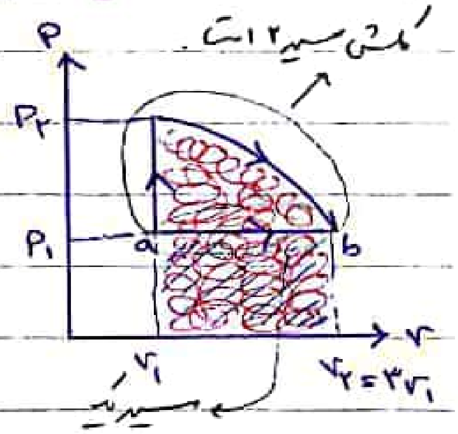
$Q_{AB} + \overset{0}{Q_{BC}} + Q_{CA} = 15\,kJ$

$20\,kJ + Q_{CA} = 15 \longrightarrow Q_{CA} = 15\,kJ$

Scanned by CamScanner

مثال ۴: نمونه ای از گاز از حالت A به حالت B می رود. در مسیر ۱ لازم است که انرژی $5P_1V_1$ به صورت گرما به گاز داده شود. در مسیر ۲ لازم است که انرژی $5{,}5P_1V_1$ به گاز داده شود نسبت $\frac{P_2}{P_1}$ چقدر است؟

جواب:



$$(\Delta E_{int})_1 = (\Delta E_{int})_2$$

$$Q_1 - W_1 = Q_2 - W_2$$

مساحت مستطیل

$$5P_1V_1 - 2P_1V_1 = 5{,}5P_1V_1 + (P_1+P_2)V_1$$

$$-1{,}5P_1V_1 = P_2V_1 \rightarrow \frac{P_2}{P_1} = |-1{,}5|$$

$$W_1 = P_1(2V_1)$$

مساحت ذوزنقه : $W_2 = \frac{(P_1+P_2)\times 2V_1}{2}$

@tehranMarkaz_BME

Scanned by CamScanner

فصل پانزدهم - نظریه جنبشی گازها

• عدد آووگادرو: تعداد ذرات یک مول از ماده را با این مشخص می‌کند. $N_A = 6\times10^{23}\ \frac{1}{mol}$

• مزیت سنجش با مول: یک مول از هر چیزی، تعداد ذراتش یکسان است. $1\,mol = 6\times10^{23}$ ذره

(n ← تعداد مول ، N ← تعداد ذرات ، M ← جرم کل سیستم ، M_A ← جرم مولی است)

$$n = \frac{N}{N_A} = \frac{M}{M_A}$$

1mol	N_A
(n)?	N

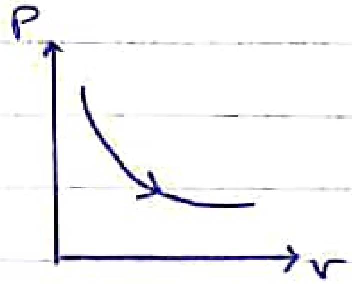
• گاز کامل یا آرمانی: گازی است که فقط در شرایط آزمایشگاهی قابل تولید است و در طبیعت وجود ندارد. گازی است آزمایشگاهی که با رقیق کردن گاز به دست آمده و به این معنی است که از برهم‌کنش اتم‌های آن صرف نظر می‌کنیم تا بتوانیم رابطه‌ی یکسانی برای همه‌ی گازها به دست آوریم.

* $PV = nRT$ R: ثابت گاز کامل و برابر است با: $R = 8.31\ \frac{J}{mol.K}$

نکته: حاصل ضرب $P\times V$ برای ما انرژی ایجاد می‌کند به همین دلیل واحدش J است.

$$\frac{PV}{T} = \text{ثابت} = nR \Rightarrow \frac{P_iV_i}{T_i} = \frac{P_fV_f}{T_f}$$

* فرآیند هم‌دما



$PV = nRT$ (ثابت) $\rightarrow P = \frac{nRT}{V}$

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P.dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV$$

$$= nRT \int \frac{dV}{V} \Rightarrow W_{\text{هم‌دما}} = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

$\ln V \Big]_{V_i}^{V_f}$ (لن)

Scanned by CamScanner

مثال ۱: n مول از گاز کاملی در فشار P_i و دمای T_i در استوانه ای به حجم ثابت V محبوس هستند. سپس این گاز به حالت نهایی با فشار P_f و T_f منتقل می‌شود. ضریب ویژه‌ی گرمایی در حجم ثابت را به دست آورید. (گاز تک اتمی است)

جواب: فرآیند از نوع هم حجم است. پس $W = 0$

$i \begin{cases} T_i \\ P_i \end{cases} \qquad f \begin{cases} T_f \\ P_f \end{cases}$

$$Q = n C_v \Delta\theta \rightarrow \Delta E_{int} = Q - W$$

$$\Delta E_{int} = n C_v \Delta\theta \rightarrow \boxed{C_v = \frac{\Delta E_{int}}{n \Delta\theta}}$$

مثال ۲: n مول از گاز کاملی در دمای T_i و حجم V_i در فشار ثابت قرار دارد. سیستم را به حالت f با دمای T_f و حجم V_f منتقل می‌کنیم. رابطه‌ی بین گرماهای ویژه‌ی مولی در فشار ثابت و حجم ثابت را به دست آورید.

جواب: فرآیند از نوع هم فشار است. پس $P =$ ثابت

$i \begin{cases} T_i \\ V_i \end{cases} \qquad f \begin{cases} T_f \\ V_f \end{cases}$

$$W = P\Delta V \rightarrow Q = n C_p \Delta T \rightarrow \Delta E_{int} = Q - W$$

$$n C_v \Delta T = n C_p \Delta T - P\Delta V \rightarrow \begin{cases} PV = nRT \\ P\Delta V = nR\Delta T \end{cases}$$

$$n C_v \Delta T = n C_p \Delta T - nR\Delta T$$

$$\rightarrow \boxed{C_p = C_v + R}$$

نکته:
- گاز تک اتمی: $C_v = \frac{3}{2}R \qquad C_p = \frac{5}{2}R$
- گاز دو اتمی: $C_v = \frac{5}{2}R \qquad C_p = \frac{7}{2}R$
- چند اتمی: $C_v = \frac{7}{2}R \qquad C_p = \frac{9}{2}R$

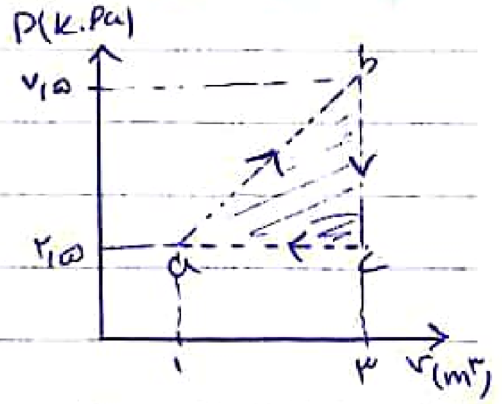
@tehranMarkaz_BME

Scanned by CamScanner

مثال ۳: گاز کاملی چرخه زیر را می پیماید.

الف) دمای گاز در نقطه b چقدر است؟

ب) انرژی گرمایی و کار را در این چرخه بدست آورید.



جواب الف/ $T_b = \frac{P_b V_b}{nR}$

$T_c = \frac{P_c V_c}{nR}$

جواب ب / $\Delta E_{int} = 0$

$W = Q = \frac{5 \times 2}{2} = 5kJ$

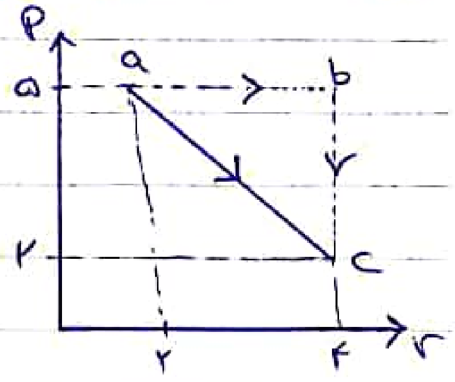
مساحت مثلث

مثال ۴: یک مول از یک گاز دواتمی کامل در راستای مسیر a تا c فرایندی را طی می کند.

الف) تغییر در انرژی درونی گاز چقدر است؟

ب) چقدر انرژی به صورت گرما داده شده است؟

ج) اگر گاز در راستای مسیر غیر مستقیم حرکت کند، چقدر گرما لازم داریم؟



جواب الف/

$(\Delta E_{int})_{ac} = n C_V \Delta T$

$= n \frac{5}{2} R \left(\frac{P_c V_c}{nR} - \frac{P_a V_a}{nR} \right) =$

$\frac{5}{2}(8 - 10) = -5kJ$

جواب ب / $[(\Delta E_{int}) = Q - W]_{ac} \Rightarrow -5kJ = Q_{ac} - 7kJ =$

$Q_{ac} = 2kJ$

جواب ج / $(\Delta E_{int})_{abc} = (\Delta E_{int})_{ac} = -5kJ \rightarrow$ زیرا اصلا به مسیر بستگی ندارد. به نقطه اول و آخر بستگی دارد.

$(\Delta E_{int})_{abc} = Q_{abc} - W_{abc}$

$-5 = Q_{abc} - 10 \rightarrow Q_{abc} = 5kJ$

Scanned by CamScanner

* فرآیند بی دررو

$PV = nRT \Rightarrow \left(\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f} \right)$

ضریب اتمیسیته ←

$PV^{\gamma} =$ ثابت

$P_i V_i^{\gamma} = P_f V_f^{\gamma}$

$* \ \gamma = \frac{C_P}{C_V}$

** برای امتحان ، فرمول پویش آزاد ، فشار ، تندی جذر میانگین مربعی سطحی خوانده شود.

@tehranMarkaz_BME

Scanned by CamScanner